ACADÉMIE DES SCIENCES.

SEANCE DU LUNDI 28 SEPTEMBRE 1953.

PRÉSIDENCE DE M. AUGUSTE CHEVALIER.



MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE

M. GASTON DUPOUY rend compte à l'Académie de la remise à la France, par le Directeur du Fonds national de la Recherche scientifique belge, du Bathyscaphe FNRS3, qui a eu lieu à Toulon, le jeudi 24 septembre, en présence du Ministre de l'Éducation nationale et du Secrétaire d'État à la Marine nationale.

Il rappelle que ce bateau a pu récemment descendre à la profondeur de 2100 m jamais encore atteinte et exprime l'espoir qu'il permettra d'élargir considérablement le champ de la prospection scientifique du domaine sous-marin et l'étude de la vie dont il est le siège.

M. PIERRE LEJAY rend compte à l'Académie des travaux de la Commission gravimétrique internationale qui s'est réunie sous sa présidence à Paris du 21 au 25 septembre. Cette Commission fondée par l'Association internationale de Géodésie lors de l'Assemblée Générale de Bruxelles en 1951, composée d'un délégué par Nation, a pour mission d'étudier les dispositions à prendre pour assurer l'établissement d'un réseau gravimétrique homogène étendu à la Terre entière.

La Commission a tout d'abord entendu le compte rendu des travaux exécutés au cours de ces dernières années. Non seulement, en de nombreuses régions, les réseaux gravimétriques se sont beaucoup développés, mais aussi de vastes campagnes à l'échelle mondiale ont cherché à établir des connexions multiples entre les stations de référence et à poser des points de référence pour les réseaux futurs.

La première question à examiner était celle de la sécurité et de la précision de l'étalonnage des gravimètres qui ont été utilisés pour ces travaux de caractère international, basé sur des mesures pendulaires diverses. La comparaison des résultats obtenus dans des stations communes ont montré que l'étalonnage des gravimètres utilisés aux États-Unis (réseau Woollard) basé sur les mesures pendulaires britanniques et australiennes, l'étalonnage des gravimètres français

(réseau J. Martin) basé sur l'ensemble des mesures pendulaires européennes, et l'étalonnage des gravimètres utilisés par C. Morelli, basé sur les mesures pendulaires allemandes, s'accordaient à environ 3 et 4 pour dix-mille près. Bien que ce résultat soit déjà presque suffisant pour les besoins de la géodésie, la Commission a considéré les avantages qu'il y aurait à établir des bases d'étalonnage en Amérique et en Europe, au moyen de mesures pendulaires de très haute précision et elle a examiné les conditions dans lesquelles de telles bases pourraient être établies, indépendamment, et comparées entre elles.

Pour assurer le développement d'un réseau mondial homogène précis, la Commission a établi le projet d'un réseau de premier ordre, comportant une trentaine de stations au maximum, qui seraient reliées entre elles par des mesures pendulaires et au moyen de gravimètres; l'emploi de ces derniers est particulièrement indiqué pour relier les stations où la valeur de la Pesanteur est sensiblement la même puisque, dans ce cas, l'incertitude sur l'étalonnage n'apporterait pas d'erreur sensible. Les conditions d'emploi des pendules pour les liaisons des points de premier ordre et pour la liaison à ce réseau fondamental des stations nationales constituant le second ordre, ont été longuement examinées; en particulier l'influence du champ magnétique terrestre sur les pendules d'invar, des microséismes, et les actions des variations de température au cours des transports des pendules ont été discutées. Des recommandations ont été adressées aux géodésiens de divers pays qui pourraient prendre la responsabilité de liaisons déterminées.

La question de l'extension des mesures en mer a fait l'objet d'un examen approfondi. Il est regrettable que pour l'instant seulement trois Nations aient effectué récemment des mesures en sous-marin : les États-Unis, la Grande-Bretagne et l'Espagne. L'attention a été attirée sur les possibilités qui s'offrent d'utiliser à des fins géodésiques les nouveaux instruments qui permettent de faire des mesures de Pesanteur en posant les appareils sur le fond dans les mers peu profondes.

Enfin la Commission a examiné les moyens de rassembler l'énorme documentation gravimétrique. Le Bureau gravimétrique international de Paris a été chargé de cette tâche; il a été fortement recommandé à tous les services gravimétriques de faire parvenir au Bureau toutes les données présentant un intérêt international, avec suffisamment de détails pour en permettre une étude critique. En particulier les observations pendulaires destinées à l'établissement des bases d'étalonnage, les observations relatives aux liaisons des points de premier ordre et de deuxième ordre devraient être communiquées aussitôt les observations terminées. Les cartes d'altitude moyenne doivent être également rassemblées par le Bureau. Celui-ci cherchera à faire ou à provoquer des études de ces documents; il communiquerait les données nécessaires à tous les géodésiens qui désireraient entreprendre de telles études.

Sur tous ces points, un accord unanime s'est établi entre les délégués qui représentaient dix-neuf nations ; on peut donc espérer que des progrès sensibles seront accomplis dans un avenir très proche par une coordination des efforts de tous les géodésiens du monde.

M. **André Danjon** informe l'Académie qu'il a assisté, du 3 au 5 septembre, à un colloque d'Astrométrie, organisé à la Northwestern University, Evanston (Illinois) par le National Research Council des États-Unis.

Au programme de cette conférence, figuraient notamment l'amélioration des catalogues d'étoiles fondamentales, la détermination des mouvements propres et le perfectionnement des instruments.

M. Danjon entretient, en outre, l'Académie de la participation française à l'Année géophysique internationale 1957-1958 et à l'opération des Latitudes et Longitudes organisée pour la même date. Il émet le vœu que les crédits nécessaires à l'exécution du programme de recherches, établi par la Commission spécialement désignée à cet effet par l'Académie, soient mis prochainement à la disposition de cette Commision par les Pouvoirs publics.

MÉCANIQUE. — *Expression généralisée du théorème de réciprocité.* Note (*) de M. **Gustavo Colonnetti**.

Nous avons terminé la Note précédente ([1]) en affirmant que l'expression générale de la réciprocité entre différents états d'équilibre comprend comme des cas particuliers les théorèmes connus de la théorie classique de l'élasticité et de la moderne théorie des états de coaction.

Pour le démontrer on procède de la façon suivante :

Il suffit de supposer l'absence de toute déformation non élastique dans l'un comme dans l'autre des états d'équilibre considérés, soit

$$\bar{\varepsilon}'_x = \bar{\varepsilon}'_y = \ldots = \bar{\gamma}'_{xy} = \bar{\varepsilon}''_x = \bar{\varepsilon}''_y = \ldots = \bar{\gamma}''_{xy} = 0$$

et l'on obtiendra tout de suite la relation

$$\int_V [F'_x u'' + F'_y v'' + F'_z w''] \, dV + \int_S [P'_x u'' + P'_y v'' + P'_z w''] \, dS$$
$$= \int_V [F''_x u' + F''_y v' + F''_z w'] \, dV + \int_S [P''_x u' + P''_y v' + P''_z w'] \, dS,$$

où l'on reconnaît immédiatement le principe énoncé par Betti ([2]) :

(*) Séance du 21 septembre 1953.

([1]) *Comptes rendus*, **237**, 1953, p. 589.

([2]) G. Colonnetti, *Scienza delle Costruzioni*. Einaudi, Torino, 1953, p. 377.

Étant donnés deux différents états de déformation d'un corps élastique, relatifs à deux différents systèmes de forces extérieures, le travail que les forces du premier système accompliraient si à leurs points d'application on attribuait les déplacements qui caractérisent la seconde déformation, est égal au travail qu'accompliraient les forces du second système si à leurs points d'application on attribuait les déplacements qui caractérisent la première déformation.

Il suffit d'autre part de supposer l'absence de toute déformation non élastique dans un seulement des deux états d'équilibre, par exemple dans le premier :

$$\bar{\varepsilon}'_x = \bar{\varepsilon}'_y = \ldots = \bar{\gamma}'_{xy} = 0$$

tandis que dans l'autre on supposera nulles toutes les forces appliquées :

$$F''_x = F''_y = F''_z = P''_x = P''_y = P''_z = 0,$$

de manière qu'il se réduise à un simple état de coaction.

On obtiendra alors l'équation

$$\int_V [F'_x u'' + F'_y v'' + F'_z w''] \, dV + \int_S [P'_x u'' + P'_y v'' + P'_z w''] \, dS$$
$$= \int_V [\sigma'_x \bar{\varepsilon}''_x + \sigma'_y \bar{\varepsilon}''_y + \ldots + \tau'_{xy} \bar{\gamma}''_{xy}] \, dV$$

qui exprime de la façon la plus générale le second principe de réciprocité ([3]) :

La somme des produits des composantes d'une déformation non élastique arbitrairement imposée au corps, par les composantes correspondantes des contraintes dues à un système quelconque de forces extérieures, est égale au travail que ces forces extérieures accompliraient dans le changement de configuration déterminé par la déformation non élastique.

Il suffit enfin de supposer que, dans l'un comme dans l'autre des états d'équilibre considérés, les forces extérieures soient toutes nulles :

$$F'_x = F'_y = F'_z = P'_x = P'_y = P'_z = F''_x = F''_y = F''_z = P''_x = P''_y = P''_z = 0.$$

Entre les deux états de coaction qu'on vient ainsi de caractériser devra subsister la relation

$$\int_V [\sigma'_x \bar{\varepsilon}''_x + \sigma'_y \bar{\varepsilon}''_y + \ldots + \tau'_{xy} \bar{\gamma}''_{xy}] \, dV = \int_V [\sigma''_x \bar{\varepsilon}'_x + \sigma''_y \bar{\varepsilon}'_y + \ldots + \tau''_{xy} \bar{\gamma}'_{xy}] \, dV$$

qui exprime d'une façon tout à fait générale la réciprocité entre coactions ([4]) :

Étant donnés deux différents états de coaction d'un même corps élastique, relatifs à deux systèmes arbitraires de déformations non élastiques, la somme des produits des composantes des déformations non élastiques qui déterminent le

---

([3]) G. Colonnetti, *loc. cit.*, p. 385, 386 et 428.

([4]) G. Colonnetti, *loc. cit.*, p. 430.

premier état de coaction par les correspondantes contraintes du second, est égale à la somme des produits des composantes des déformations non élastiques qui déterminent le second état de coaction par les contraintes correspondantes du premier.

Le fait que ces trois théorèmes soient des cas particuliers et tout à fait indépendants de la formule générale que je viens d'établir, n'est pas sans importance : il mérite au contraire d'être souligné ne fût-ce que pour mettre fin, une fois pour toutes, aux vains efforts de déduire ces théorèmes l'un de l'autre à l'aide d'artifices plus ou moins ingénieux ([5]).

M. **Léopold Escande** adresse en hommage à l'Académie la première Partie de son Ouvrage intitulé : *Nouveaux compléments d'hydraulique*, qui fait partie des *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air* et dont M. **Charles Camichel** a écrit la *Préface*.

M. **Henry Norris Russell** adresse en hommage à l'Académie un Mémoire publié en collaboration avec M. John Ellsworth Merrill et intitulé : *The Determination of the Elements of Eclipsing Binaries*.

L'Ouvrage suivant est présenté par M. **Joseph Pérès**.

Table des fonctions de Legendre associées. Fonction associée de première espèce $P_n^m(\cos\theta)$. Premier fascicule : [n : $-0,5(0,1)10$], [m : $0(1)5$], [θ : $0(1)90°$], calculées pour le Centre National d'études des télécommunications par le Service mécanographique de l'Armée de terre.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Albert Einstein. *L'éther et la théorie de la Relativité. La géométrie et l'expérience*. Traduit de l'allemand par Maurice Solovine. Troisième édition.

2° Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air. N° 282. *Régularité et séries divergentes*, par Pierre Vernotte. Ouvrage suivi d'une postface du même auteur : *Propos d'un ignorant*.

([5]) *Voir* à ce propos la Note où M. Albenga s'efforce de présenter le second principe de réciprocité (dans la forme incomplète et inexacte due à Land) comme une conséquence du théorème de Betti (G. Albenga, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 30, 1915).

ALGÈBRE ET TOPOLOGIE COMBINATOIRE. — *Sur les algèbres extérieures et les algèbres de Clifford en tant que produits croisés et sur la notion de complexe simplicial.* Note de M. **Jacques Riguet**, présentée par M. Jacques Hadamard.

On peut définir les algèbres extérieures et les algèbres de Clifford comme des produits croisés d'un corps par un anneau booléen. Il y a équivalence entre le concept de système de facteurs de Grassmann et le concept de complexe simplicial. On pourrait généraliser en supposant que l'anneau booléen est remplacé par un p-anneau.

Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Etant donné un ensemble E, nous avions désigné ([1]) par $\mathfrak{L}(\mathrm{K})$ le sous-ensemble de K^{E} constitué par les suites $u \in \mathrm{K}^{\mathrm{E}}$ dont le support est fini.

Nous allons supposer que E est muni d'une structure d'algèbre de Boole atomique généralisée ([2]) dans laquelle la différence symétrique de deux éléments x et y est notée $x \oplus y$ et leur borne inférieure xy. Nous dirons qu'une matrice $\gamma \in \mathrm{K}^{\mathrm{E}\times\mathrm{E}}$ est un système de facteurs ([3]) sur E lorsque

$$\gamma(x, y)\gamma(x \oplus y, z) = \gamma(x, y \oplus z)\gamma(y, z).$$

C'est là la condition nécessaire et suffisante pour que la γ-convolution $u_\gamma v$ des deux suites u et v définie par

$$u_\gamma v(x) = \sum_{y \oplus z = x} \gamma(y, z)\, u(y)\, v(z)$$

soit associative.

Nous dirons qu'une matrice $\gamma \in \mathrm{K}^{\mathrm{E}\times\mathrm{E}}$ est multiplicative lorsque

$$\gamma(x \oplus y, z \oplus t) = \gamma(x, z)\gamma(x, t)\gamma(y, z)\gamma(y, t).$$

Toute matrice multiplicative est un système de facteurs.

Si γ est une matrice multiplicative telle que $\gamma(x, x) = 1$ si $x = 0$ et $\gamma(x, x) = -1$ si $x \neq 0$, alors la γ-convolution correspondante sera appelée multiplication de Clifford et $\mathfrak{L}(\mathrm{K})$, muni de l'addition habituelle et de cette multiplication (associative), l'algèbre de Clifford sur E.

Si γ est un système de facteurs tel que $\gamma(x, y) = \pm 1$ si $xy = 0$ et $\gamma(x, y) = 0$ si $xy \neq 0$ et si $\gamma(x, y) = (-1)^{d(x)d(y)}\gamma(y, x)$ ([4]) alors la γ-convolution correspondante sera appelée multiplication de Grassmann et $\mathfrak{L}(\mathrm{K})$ muni de

---

([1]) *Cf.* J. Riguet, *Comptes rendus*, 236, 1953, p. 1839. Il s'agisssait là de suites numériques, mais cela ne change rien.

([2]) Au sens de Stone, *Amer. J. Math.*, 57, 1935; *voir* aussi G. Birkhoff, *Lattice theory*, 2e édit., p. 70, ex. 5.

([3]) *Cf.* Bourbaki, *Algèbre*, chap. II.

([4]) $d(x)$ désignant la longueur de toute chaîne maximale de l'ordre booléen de E joignant o a x. *Cf.* G. Birkhoff, *op. cit.*

l'addition habituelle et de cette multiplication (associative) l'algèbre extérieure sur E.

On montre alors que lorsque E est fini, ces définitions coïncident, à un isomorphisme près, avec les définitions classiques.

Soit γ une convolution de Grassmann. Nous noterons $u \wedge v$ la γ-convolution des deux suites $u, v \in \mathfrak{T}(K)$.

Supposons que E a un plus grand élément, autrement dit, que E est une algèbre de Boole atomique. On peut alors définir le « complément » u' de $u \in \mathfrak{T}(K)$ par $u'(x) = \gamma(x', x) u(x')$, x' désignant le complément de x dans E. On a $u'''' = u$ (5).

On définit le produit intérieur à gauche (droite) de deux suites u, v par

$$u \rfloor v = (u \wedge v')''', \qquad u \lfloor v = (u''' \wedge v)'.$$

On montre alors que si le support de u est inclus dans l'ensemble I des atomes de E la matrice i_u définie par $i_u v = v \lfloor u$ est une ω antidérivation (6) relativement à la matrice diagonale ω telle que $\omega(x, x) = (-1)^{d(x)}$ (7) et le support de la matrice i_u est inclus dans la relation de consécutivité booléenne sur E.

En particulier, si $p \in I$, $i_{f_I}(x \oplus p, x) = \gamma(p, x)$, ce qui montre que γ est déterminée par la dérivation i_{f_I}. Autrement dit il y a équivalence entre le concept de système de facteurs de Grassmann et le concept de complexe simplicial déterminé par une matrice d'incidence (8).

Dans une prochaine Note nous étendrons ces considérations à la cohomologie des groupes au sens d'Eilenberg.

Signalons que l'on pourrait d'une manière évidente définir, à l'aide de ce qui précède, des algèbres extérieures et des algèbres de Clifford généralisées en supposant que E est un p-anneau au sens de Montgomery et Mac Coy.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques inégalités concernant une classe d'intégrales de Dirichlet.* Note de M. **Alexandre Dinghas**, présentée par M. Jacques Hadamard.

Désignons par S_n la périsphère-unité $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1$ et par $\psi(x)$ la fonction $\sin \sqrt{K} x : \sqrt{K}$, K étant une constante réelle. Alors l'espace donné par son élément linéaire

$$ds^2 = dl^2 + \psi^2(l)(d\xi_1^2 + \ldots + d\xi_n^2) \tag{1}$$

---

(5) La dualité booléenne n'est donc pas conservée par l'immersion de E dans $\mathfrak{T}(K)$ mais transformé en « quaternarité ».

(6) La matrice α est dite ω-antidérivation si $\alpha\omega + \omega\alpha = 0$, $\alpha(u \wedge v) = (\alpha u) \wedge v + (\omega u) \wedge (\alpha v)$.

(7) *Cf.* Koszul, *Bull. Soc. Math. France*, 78, 1950, p. 71.

(8) *Voir* S. Lefschetz, *Algebraic topology* (*Colloq. publ.*, n° 27, chap. III, § 5, p. 92).

représente un espace C^n à courbure constante K. Pour $K > 0$, nous nous bornons dans la suite au cas d'un espace sphérique, en admettant que l'on a $0 \leq \sqrt{K}\, l \leq \pi$.

Soit $P(l, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ un point quelconque de C^n et soit dO_n son élément de volume. En supposant que la fonction $\upsilon = \upsilon(P)$ est une fonction non négative et bornée de P deux fois différentiable et nulle sur la frontière d'un ensemble ouvert $A \subset C^n$, on peut interpréter l'intégrale

$$J(\upsilon) = 2\int_A \upsilon\, dO_n, \tag{2}$$

comme le volume non euclidien V(M) d'un corps M dans l'espace Z^{n+1}

$$ds_1^2 = ds^2 + dy^2 \qquad (-\infty < y < +\infty) \tag{3}$$

et symétrique par rapport au plan $y = 0$. Cela étant, nous introduisons la fonction $\tau(l)$ par l'équation

$$\tau(l) = \omega_n \int_0^l \psi^{n-1}(\alpha)\, d\alpha \tag{4}$$

ω_n représentant la mesure totale de S_n et posons

$$\sigma(l) = \tau(l) : \tau'(l).$$

Alors en admettant pour la frontière de A certaines conditions de régularité et en observant que la surface O(M) de M est donnée par l'équation

$$O(M) = 2\int_A \sqrt{1 + \nabla(\upsilon)}\, dO_n, \tag{5}$$

$\nabla(\upsilon)$ signifiant la première expression différentielle de Beltrami dans C^n, on peut démontrer l'inégalité

$$q\int_A \sqrt{1 + \nabla(\upsilon)}\, dO_n \geq \int_A \upsilon\, dO_n + 2\omega_n \int_0^{l_0} \sqrt{q^2 - \sigma^2(\alpha)}\, \psi^{n-1}(\alpha)\, d\alpha, \tag{6}$$

l_0 étant défini par l'équation

$$\int_A dO_n = \tau(l_0).$$

et q étant égal à $\sigma(l_0)$.

La démonstration de (6) se fait par des méthodes dues à M. Erhard Schmidt en appliquant en même temps à M la symétrisation de Schwarz-Schmidt qui comme on sait conduit à un corps de révolution $\overline{M}$ dans Z^{n+1} ayant le même volume que M et une surface au plus égale à O(M).

En remplaçant maintenant dans (6) u par $u : \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ et en faisant tendre ε vers zéro après multiplication par ε, on tire l'inégalité

$$q\int_A \nabla(\upsilon)^{\frac{1}{2}}\, dO_n \geq \int_A \upsilon\, dO_n. \tag{7}$$

Cette inégalité est valable pour toute valeur de la courbure K et pour toute fonction non négative, différentiable et nulle sur la frontière de A.

Plus généralement en appliquant l'inégalité connue de Hölder à (7) écrite pour $v = u^{2a}$, on prouve pour toute fonction u différentiable et s'annulant sur la frontière de A,

$$(8) \qquad (2aq)^{2a} \int_{A} \nabla^{a}(u)\, dO_n \geqq \int_{A} u^{2a}\, dO_n \qquad (a \geqq 1).$$

Les inégalités (7) et (8) permettent des applications intéressantes sur le problème de l'estimation de l'ordre d'une fonction harmonique ou sousharmonique dans R^n sachant que celle-ci reste bornée sur des multiplicités données s'étendant jusqu'à l'infini. Je reviendrai prochainement sur cette question.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur une forme générale du théorème de Phragmén-Lindelöf.* Note de M. **Joseph Hersch**, présentée par M. Paul Montel.

Une modification de la définition usuelle des longueurs extrémales livre immédiatement une inégalité exacte et plus forte que celle de Strebel ([1]). Cette inégalité indique le comportement asymptotique des modules et de la mesure harmonique (*voir* la figure). D'où un énoncé des deux théorèmes de Phragmén-Lindelöf, qui ne suppose nullement que les arcs emboîtés θ_λ soient rectilignes ou circulaires.

1. Par *longueur extrémale* d'une famille de courbes $\{c\}$, nous entendons la grandeur $L_{\{c\}}$ telle qu'elle a été définie dans une Note antérieure ([2]). Cette définition se distingue de celle d'Ahlfors et Beurling ([3]) en ceci : on ne suppose pas l'existence des intégrales; en lieu et place de cette hypothèse interviennent les intégrales supérieure et inférieure de Darboux. La modification ainsi apportée abrège et simplifie les démonstrations, en les réduisant à l'essentiel.

2. Soient $\{c_1\}$ et $\{c_2\}$ deux familles de courbes. L'inégalité

$$(1) \qquad L^{-1}_{\{c_1\}\cup\{c_2\}} \leqq L^{-1}_{\{c_1\}} + L^{-1}_{\{c_2\}}$$

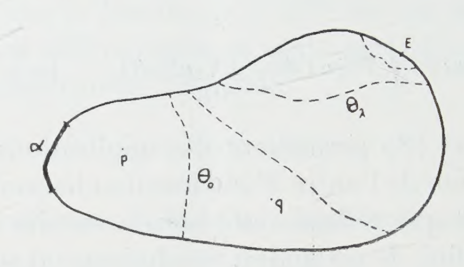
est très facile à démontrer : en effet, si la répartition ρ_1 est concurrente pour $\{c_1\}$ et si ρ_2 est concurrente pour $\{c_2\}$, il s'ensuit que $\rho(z) = \max(\rho_1(z), \rho_2(z))$ est concurrente pour $\{c_1\} \cup \{c_2\}$. M. K. Strebel ([1]) a démontré, pour la définition d'Ahlfors et Beurling, l'inégalité plus faible $L^{-\frac{1}{2}}_{\{c_1\}\cup\{c_2\}} \leqq L^{-\frac{1}{2}}_{\{c_1\}} + L^{-\frac{1}{2}}_{\{c_2\}}$. L'inégalité (1) ne peut plus être améliorée, car l'égalité a lieu chaque fois que $\{c_1\}$ et $\{c_2\}$ couvrent des ensembles disjoints.

([1]) *Ann. Acad. Sc. Fenn.*, sér. A1, *Math.-Phys.*, 90, 1951.

([2]) J. Hersch, *Comptes rendus*, 235, 1952, p. 569.

([3]) *Acta Math.*, 83, 1950, p. 114.

3. Soient (*figure*) G un domaine de Jordan de frontière Γ; α un arc-frontière; $\{\theta_\lambda\}$ $(0 \leqq \lambda < \infty)$ une famille d'arcs de Jordan dans G, à extrémités sur $\Gamma - \alpha$, tels que, si $\lambda' < \lambda < \lambda''$, θ_λ sépare α et $\theta_{\lambda'}$ de $\theta_{\lambda''}$, et se refermant, lorsque $\lambda \to \infty$, sur un point E de Γ (E diffère d'une extrémité d'un θ_λ).



La suradditivité des *modules* (⁴) (bien connue) exprime que $\mu_{\alpha\theta_\lambda} \geqq \mu_{\alpha\theta_0} + \mu_{\theta_0\theta_\lambda}$. Mais l'inégalité (1) montre très simplement que l'on a même

$$\mu_{\alpha\theta_\lambda} = \mu_{\theta_0\theta_\lambda} + O(1) \quad (^5). \tag{2}$$

L'inégalité (1) permet aussi de démontrer sans peine, grâce à une formule annoncée dans la Note (²) (§ 2), les deux propriétés suivantes relatives à la mesure harmonique ω : p et q étant deux points quelconques intérieurs à G,

$$\omega_{q\theta_\lambda} = \omega_{p\theta_\lambda}\, e^{O(1)}, \tag{3}$$

$$\omega_{p\theta_\lambda} = e^{-\pi\mu_{\theta_0\theta_\lambda} + O(1)}. \tag{4}$$

Les formules asymptotiques (2), (3), (4) se généralisent immédiatement au cas où G est multiplement connexe, pourvu que E soit un arc libre de Jordan appartenant à la frontière.

4. Nous ferons désormais abstraction de l'arc-frontière α. Soit u une fonction harmonique dans G et négative ou nulle sur $\Gamma - E$. Posons $u_\lambda = \max_{z \in \theta_\lambda} u(z)$ et $\omega_\lambda = \omega_{p\theta_\lambda}$. En vertu du principe de la majorante harmonique, on a $u(p) \leqq \underline{\lim}_{\lambda \to \infty} (u_\lambda \omega_\lambda)$. Soit

$$\sigma_0 = \underline{\lim}_{\lambda \to \infty} \left(u_\lambda\, e^{-\pi\mu_{\theta_0\theta_\lambda}}\right); \tag{5}$$

nous avons donc, en vertu de (4), les énoncés suivants pour les théorèmes de Phragmén-Lindelöf :

Théorème 1. — *Si* $\sigma_0 \leqq 0$, *alors* $u \leqq 0$, *dans tout* G.

Théorème 2. — *Si* $\sigma_0 = -\infty$, *alors* $u \equiv -\infty$ *dans* G.

(⁴) Le *module* $\mu_{\beta'\beta''}$ d'un rectangle dont les côtés β' et β'' ont la longueur b et les côtés α' et α'' la longueur a, est a/b; par représentation conforme, cette définition du module s'étend à tout « quadrilatère » (domaine de Jordan avec quatre points désignés sur la frontière).

(⁵) O(1) désigne une grandeur dont la valeur absolue reste bornée lorsque $\lambda \to \infty$.

Remarquons ici qu'on peut compléter le théorème 1 comme suit : Si θ_0 sépare p de E et si $\sigma_0 \geqq 0$, alors

$$u(p) \leqq \frac{8}{\pi}\sigma_0 e^{-2\pi\nu\left(\sin\frac{\pi\theta_0}{2}\right)}, \tag{6}$$

où ν est la fonction non négative décroissante définie dans la Note [2].

Le procédé de démonstration indiqué représente un retour à la méthode de la majorante harmonique, c'est-à-dire à l'idée initiale de Phragmén et Lindelöf.

5. Remarquons enfin l'inégalité (1) et la formule asymptotique (2) se laissent transposer pour l'espace à trois dimensions. Étant donnée une famille $\{\gamma\}$ de courbes (resp. de surfaces), on posera $L_{\{\gamma\}}^{-1} = \inf_\rho \overline{\iiint} \rho^2\, dV$ [6], où l'on admet à concurrence toutes les fonctions réelles non négatives ρ telles que $\underline{\int_\gamma} \rho\, ds \geqq 1$ $\left(\text{resp. } \underline{\iint_\gamma} \rho\, df \geqq 1\right)$ pour toute $\gamma \in \{\gamma\}$.

MÉCANIQUE. — *Sur l'extinction asynchrone.*

Note de M. **Nicolas Minorsky**, présentée par M. Henri Beghin.

On étudie dans cette Note le cas où une oscillation auto-entretenue est étouffée ou « éteinte » par une oscillation périodique extérieure d'une fréquence assez élevée. On montre que ce phénomène est dû à la perte de la stabilité du régime oscillatoire quand cette fréquence est suffisamment grande.

Il est bien connu que, si l'on applique à un oscillateur non-linéaire de la fréquence ω_0 une excitation périodique extérieure (e. p. e. pour abréger) de la fréquence ω n'ayant aucun rapport commensurable avec ω_0, l'oscillation ω_0 disparaît ou est « éteinte » pour une valeur suffisamment grande de ω. On désigne souvent ce phénomène sous le nom d'*extinction asynchrone*, le mot « asynchrone » soulignant ce qui vient d'être précisé au sujet du rapport ω/ω_0. Il est clair que ce phénomène se ramène à une équation différentielle (e. d.) de la forme

$$\ddot{x} - (a - cx^2)\dot{x} + x = \gamma \sin \omega t \tag{A}$$

dans laquelle le deuxième membre est précisément cette e. p. e. Pour simplifier le problème, nous supposerons que les paramètres a, c et γ sont des petits nombres du même ordre de grandeur.

En appliquant le procédé stroboscopique comme cela a été expliqué dans

---

(6) dV désigne l'élément de volume, df l'élément de surface, ds l'élément linéaire; $\overline{\int}$ est l'intégrale supérieure, $\underline{\int}$ l'intégrale inférieure de Darboux.

quelques Notes précédentes [1], on aboutit aux e. d. suivantes :

$$\text{(B)}\quad \frac{dr}{d\tau} = -\sigma(r^3 - pr + q), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{gR}{r}, \qquad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad y = \dot{x} = \frac{dx}{dy};$$

φ est la phase;

$$q = q(\omega) = hQ; \qquad h = h(\omega) = \frac{4\gamma}{\pi c(\omega^2 - 1)}; \qquad g = g(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi c(\omega^2 - 1)};$$

$$\sigma = \frac{c}{8\varepsilon} = \frac{C}{8}; \qquad Q = m\cos\varphi + \omega n \sin\varphi; \qquad R = m\sin\varphi - \omega n \cos\varphi;$$

$$m = m(\omega) = \sin 2\pi\omega; \qquad n = n(\omega) = \cos 2\pi\omega - 1; \qquad p = \frac{4a}{c}$$

et ε est le petit paramètre dans les séries par lesquelles on intègre le système (B). On se limitera ici à la première approximation seulement.

Le point singulier (r_0, φ_0) du système (B) est donné par les relations

$$\text{(C)}\qquad r^3 - pr + q = 0; \quad R(\varphi) = 0.$$

La phase φ_0 s'obtient de la deuxième relation, à savoir $\varphi_0 = \omega n/m$; les valeurs φ_0 et $\varphi_0 + \pi$ satisfont à cette relation; une de ces phases est stable et l'autre instable. Les équations aux variations montrent que la phase stable correspond toujours aux valeurs négatives de fonctions gQ et hQ en sorte qu'on peut poser $|gQ| = s(\omega)$; $|hQ| = |q| = v(\omega)$. On trouve que $s(\omega) = k_1 f(\omega)$ et $v(\omega) = k_2 f(\omega)$ ou k_1 et k_2 sont des constantes positives et $f(\omega)$ est une fonction positive. On trouve que $f(1) = \pi$, $f(\omega) = 0$ pour $\omega = 2, 3, 4, \ldots$; $f(\omega)$ passe par les maxima $\omega/(\omega^2 - 1)$ pour $\omega = (2k+1)/2$, $k = 0, 1, 2 \ldots$. On voit ainsi que les maxima de $f(\omega)$ ainsi que de $s(\omega)$ tendent vers zéro quand ω augmente indéfiniment.

L'étude de la stabilité se ramène aux équations aux variations ce qui résulte dans l'équation caractéristique de la forme

$$\text{(D)}\qquad S^2 + [\sigma(3r_0^2 - p) + s(\omega)]S + \sigma(3r_0^2 - p)s(\omega) = 0 \ldots.$$

L'équation aux variations pour l'amplitude exige pour la stabilité que $(3r_0^2 - p)$ soit positif. Cette condition, toutefois, est toujours remplie en vertu de la forme explicite des racines d'une équation cubique comme il est facile de le montrer. On voit ainsi que le point singulier est un nœud stable. Quand ω croît, le coefficient de S dans (D) s'approche de la valeur finie et positive $(3r_0^2 - p)$, tandis que le dernier terme diminue indéfiniment avec $s(\omega)$. En d'autres mots, le point singulier R_0, qui est le nœud stable ici, s'approche indéfiniment du seuil critique N qui sépare la zone de nœuds stables de celle de cols dans le diagramme de distribution de points singuliers. Comme dans

---

(1) N. Minorsky, *Comptes rendus*, **231**, 1950, p. 1417; **232**, 1951, p. 2179; **234**, 1952, p. 292.

tout système physique à l'état d'équilibre stable, l'affixe A du système ne coïncide jamais rigoureusement avec le point singulier, mais se déplace un peu autour de ce point sous l'influence de petites perturbations (fluctuations statistiques), il est visible que, quand R_0 s'approche de N suffisamment, une de ces perturbations peut être suffisante pour que A puisse franchir le seuil N, ce qui entraîne la perte de stabilité et, dès lors, l'extinction de l'oscillation.

On voit ainsi que le phénomène de l'extinction asynchrone est un phénomène *asymptotique* dans ce sens qu'il a lieu pour des valeurs de la fréquence ω suffisamment grandes pour lesquelles le nœud stable s'approche si près de la frontière séparant ces points singuliers de la région de cols qu'il suffit d'une petite perturbation pour que la stabilité soit perdue.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur les équations fonctionnelles des fluides turbulents.* Note de M. **Jean Bass**, présentée par M. Joseph Pérès.

Établissement de l'équation d'évolution de la fonctionnelle caractéristique d'un champ de vitesse aléatoire obéissant aux équations de Navier-Stokes, en termes spectraux, dans l'espace et dans l'espace-temps.

Dans un important Mémoire (¹), E. Hopf a étudié les solutions aléatoires (turbulentes) des équations de Navier-Stokes pour un fluide *incompressible*. Il a introduit la *fonctionnelle caractéristique* φ de la vitesse aléatoire **U**, considérée comme un point d'un espace Ω dont la nature n'est pas spécifiée. Si le fluide occupe tout l'espace, Ω peut ne pas être un espace de Hilbert, mais il semble légitime d'admettre que Ω puisse être un espace $L^p (p < 2)$, et de supposer en même temps **U** continue, bornée et convenablement dérivable (sur chaque épreuve).

E. Hopf pose $\varphi = \exp.(i\mathcal{L})$, $\mathcal{L} = \int_{(x)} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t).\mathbf{y}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ étant une fonctionnelle linéaire *bornée* dans Ω[(x) est l'espace occupé par le fluide)] (²). L'inconvénient de cette définition est que la fonction caractéristique ordinaire des **U** en un ou plusieurs points n'est pas un φ, mais seulement une limite de fonctionnelles φ. Il semble préférable de définir $\mathcal{L}$ par une intégrale de Stieltjes :

(1) $$\mathcal{L} = \int_{(x)} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t).d\mathbf{y}(\mathbf{x}),$$

où $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ est une fonction à variation bornée dans (x).

(¹) *J. Rat. Mech. and Analysis*, **1**, n° **1**, 1952, p. 87-123.

(²) *Notations :* Petites lettres, grandeurs certaines ; grandes lettres, grandeurs aléatoires ; lettres grasses, vecteurs ; $\|\mathbf{k}\|$, norme d'un vecteur ; $\mathbf{k}.\mathbf{x}$, produit scalaire ; α, β, γ, indices variant de 1 à 3 ; k_α, composantes du vecteur **k**. Il s'agit toujours de vecteurs à trois composantes.

Je me propose de montrer comment ce symbolisme s'adapte naturellement à l'établissement de l'équation fonctionnelle d'évolution de φ en *termes spectraux*, sans qu'il soit utile de passer, comme l'a fait E. Hopf, par l'intermédiaire d'un écoulement périodique dans l'espace. Il suffit de représenter la vitesse $\mathbf{U}$ et la pression P par des *intégrales de Fourier stochastiques*

$$(2)\qquad U_\alpha=\int_{(k)} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}} Z_\alpha(d\mathbf{k}),\qquad P=\int_{(k)} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}} Z_0(d\mathbf{k}),$$

où $Z_\alpha(S)$, $Z_0(S)$ sont des fonctions aléatoires additives des sous-ensembles mesurables S de l'espace spectral (k) [3], et aussi des fonctions de t. On pose

$$(3)\qquad \varphi=\mathrm{E}e^{i\mathcal{L}},\qquad \mathcal{L}=\int_{(x)}\mathbf{U}(\mathbf{x},t).d\mathbf{y}(x)=\int_{k}\mathbf{a}(\mathbf{k}).\mathbf{Z}(d\mathbf{k}),\qquad a_\alpha(\mathbf{k})=\int_{(x)} e^{i\mathbf{x}.\mathbf{k}}\,dy_\alpha(\mathbf{x}).$$

φ est fonctionnelle du vecteur $\mathbf{a}$, et fonction de t. On forme les expressions

$$(4)\qquad \varphi'_\alpha(\mathbf{a}\mid S)=i\mathrm{E}\,e^{i\mathcal{L}}Z_\alpha(S),\qquad \varphi''_{\alpha\beta}(\mathbf{a}\mid S,S')=-\mathrm{E}\,e^{i\mathcal{L}}Z_\alpha(S)\,Z_\beta(S'),$$

qui sont des fonctionnelles de $\mathbf{a}$, et des fonctions des ensembles S et (S′) et de t. On peut les appeler *dérivées fonctionnelles* d'ordres 1 et 2 de φ, mais on ne discutera pas ici dans quelle mesure leur intégration permet de retrouver φ. Si l'on écrit les équations de Navier-Stokes sous forme spectrale

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{b}(\mathbf{k}).\mathbf{Z}(d\mathbf{k})+\mu\int_S\|\mathbf{k}\|^2\,\mathbf{b}(\mathbf{k}).\mathbf{Z}(d\mathbf{k})$$
$$+\,i\int_S b_\alpha(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,[k'_\beta Z_\beta(d\mathbf{k})]\left\{Z_\alpha(d\mathbf{k}')-\frac{k_\alpha+k'_\alpha}{\|\mathbf{k}+\mathbf{k}'\|^2}[k_\gamma Z_\gamma(d\mathbf{k}')]\right\}=0,$$

où $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ est une fonction arbitraire, on aboutit pour φ à l'équation suivante :

$$(6)\qquad i\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mu\int_{(k)}\|\mathbf{k}\|^2 a_\alpha(\mathbf{k})\,\Phi'_\alpha(\mathbf{a}\mid d\mathbf{k})+\int_{(k)} a_\alpha(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,k'_\beta\Big[\varphi''_{\beta\alpha}(\mathbf{a}\mid d\mathbf{k},d\mathbf{k}')$$
$$-\frac{k_\alpha+k'_\alpha}{\|\mathbf{k}+\mathbf{k}'\|^2}k_\gamma\varphi''_{\beta\gamma}(\mathbf{a}\mid d\mathbf{k},d\mathbf{k}')\Big]=0,$$

qui justifie et complète les résultats de E. Hopf. Le problème de l'intégration et de l'utilisation de cette équation fondamentale reste bien entendu entier.

Cas de l'espace-temps. — Comme E. Hopf l'a suggéré, on peut transformer le temps comme l'espace [4]. On représente la vitesse et la pression par les intégrales stochastiques

$$(7)\qquad U_\alpha=\int_{(k)} e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{x}+k_0t)}Z_\alpha(d\mathbf{k},dk_0),\qquad P=\int_{(k)} e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{x}+k_0t)}Z_0(d\mathbf{k},dk_0),$$

---

(3) *Voir*, H. Cramer, *Proc. of the second Berkeley Symposium on math. Statistics and Probability*, 1951, p. 329-339.

(4) *Voir* aussi : J. Bass, *Space and time spectra in a turbulent fluid.* (*Communication au colloque de Mécanique des fluides*, Pennsylvania State College, 1-3 juillet 1953).

où (k) est un espace spectral à quatre dimensions. On pose

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \mathrm{E}\, e^{i\mathcal{L}}, \qquad \mathcal{L} = \int_{(x,t)} \mathbf{U}(\mathbf{x},\, t).d\mathbf{y}(\mathbf{x},\, t) = \int_{(k)} \mathbf{a}(\mathbf{k},\, k_0).\mathbf{Z}(d\mathbf{k},\, dk_0), \\ \qquad a_\alpha = \int e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{x}+k_0 t)}\, dy_\alpha(\mathbf{x},\, t). \end{array} \right.$$

φ'_α et $\varphi''_{\alpha\beta}$ sont toujours définis par (4), à condition de considérer maintenant S comme un sous ensemble du nouvel espace (k) à quatre dimensions. Compte tenu de la condition d'incompressibilité, les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$(9)\quad \int_{\mathrm{S}} (k_0 - i\mu \|\mathbf{k}\|^2)\, \mathbf{b}(\mathbf{k},\, k_0).\mathbf{Z}(d\mathbf{k},\, dk_0) + \int_{\mathrm{S}} b_\alpha(\mathbf{k}+\mathbf{k}',\, k_0 + k'_0)\, \{ k'_\beta \mathrm{Z}_\beta(d\mathbf{k},\, dk_0) \} \times \left\{ \mathrm{Z}_\alpha(d\mathbf{k}',\, dk'_0) - \frac{k_\alpha + k'_\alpha}{\|\mathbf{k}+\mathbf{k}'\|^2} [k_\gamma \mathrm{Z}_\gamma(d\mathbf{k}',\, dk'_0)] \right\} = 0.$$

La nouvelle fonctionnelle caractéristique évolue suivant l'équation

$$(10)\quad \int_{(k)} (ik_0 + \mu \|\mathbf{k}\|^2)\, a_\alpha(\mathbf{k},\, k_0)\, \varphi'_\alpha(\mathbf{a} \mid d\mathbf{k},\, dk_0) + \int_{(k)} a_\alpha(\mathbf{k}+\mathbf{k}',\, k_0 + k'_0)\, k'_\beta \times \left[\varphi''_{\beta\alpha}(\mathbf{a} \mid d\mathbf{k},\, d\mathbf{k}_0;\, d\mathbf{k}',\, dk'_0) - \frac{k_\alpha + k'_\alpha}{\|\mathbf{k}+\mathbf{k}'\|^2} k_\gamma \varphi''_{\beta\gamma}(\mathbf{a} \mid d\mathbf{k},\, d\mathbf{k}_0;\, dk',\, dk'_0) \right] = 0.$$

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Une identité conduisant à la solution du problème de Kirchhoff pour les ondes amorties.* Note (*) de M. **Émile Durand**, présentée par M. Louis de Broglie.

Cette identité a l'avantage de conduire directement à la solution de l'équation des ondes du deuxième ordre avec second membre; elle donne aussi avec une égale facilité la solution des systèmes d'équations du premier ordre. Elle s'écrit, pour trois variables d'espace, avec $u = 1, 2, 3$:

$$(1)\quad \left. \begin{array}{c} 4\pi \\ 2\pi \\ 0 \end{array} \right\} \psi(x_u,\, vt) = [\partial_u \partial^u + k_0^2 - v^{-2} \partial_t \partial_t] \iiint_{(v)} dv \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} \psi(x'_u,\, v\tau)\, \mathrm{I}_0(k_0\gamma)\, v\, d\tau,$$

on a 4π, 2π ou zéro suivant que le point x_u est à l'intérieur, sur les limites ou à l'extérieur du domaine (v). Dans cette expression, $\partial_u \partial^u$ est l'opérateur Laplacien, $dv = dx'_1\, dx'_2\, dx'_3$, I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro $[\mathrm{I}_0(k_0\gamma) = \mathrm{J}_0(ik_0\gamma)]$; $\gamma = [v^2(t-\tau)^2 - r^2]^{1/2}$; $r^2 = (x_u - x'_u)(x^u - x'^u)$ avec une somme sur l'indice muet u; k_0 est une constante.

(*) Séance du 21 septembre 1953.

En dérivant par rapport à r, l'équation (1) devient

$$\left.\begin{matrix}4\pi\\2\pi\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_u, vt) = [\partial_u\partial^u + k_0^2 - v^{-2}\partial_t\partial_t]\left\{-\iiint_{(v)}\psi(x'_u, vt - r)r^{-1}\,dv'\right\} \tag{2}$$
$$+ [\partial_u\partial^u + k_0^2 - v^{-2}\partial_t\partial_t]\left\{-vk_0\iiint_{(v)}dv'\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}}\psi(x'_u, v\tau)\gamma^{-1}I_1(k_0\gamma)\,d\tau\right\}.$$

On sait que pour l'opérateur des ondes non amorties $[\partial_u\partial^u - v^{-2}\partial_t\partial_t]$, on a l'identité (1)

$$\left.\begin{matrix}4\pi\\2\pi\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_u, vt) = [\partial_u\partial^u - v^{-2}\partial_t\partial_t]\left\{-\iiint_{(v)}\psi(x'_u, vt - r)r^{-1}\,dv'\right\}. \tag{3}$$

Pour démontrer (2) il suffit, par conséquent, de vérifier que l'on a

$$0 = -k_0^2\iiint_{(v)}\psi(x'_u, vt - r)r^{-1}\,dv' \tag{4}$$
$$+ [\partial_u\partial^u + k_0^2 - v^{-2}\partial_t\partial_t]\left\{-vk_0\iiint_{(v)}dv'\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}}\psi(x'_u, v\tau)\gamma^{-1}I_1(k_0\gamma)\,d\tau\right\}.$$

Pour cela on dérive la parenthèse par rapport à t et à x_u; en tenant compte de

$$\left\{\begin{array}{l}\{\partial_u[\gamma^{-1}I_1(k_0\gamma)]\}_{\tau=t-\frac{r}{v}} = -(\partial_u r)\{v^{-1}\partial_t[\gamma^{-1}I_1(k_0\gamma)]\}\\ \text{et de}\\ \qquad [\partial_u\partial^u + k_0^2 - v^{-2}\partial_t\partial_t][\gamma^{-1}I_1(k_0\gamma)] = 0\end{array}\right. \tag{5}$$

on trouve aisément que le second membre de (4) est identiquement nul.

Montrons maintenant comment l'identité (1) conduit à la solution du problème de Kirchhoff. Pour cela nous partons de (2) et nous dérivons d'abord les parenthèses par rapport à la variable t. Il n'y a pas de difficultés pour la première; pour la deuxième on dérive d'abord par rapport à la limite d'intégration, puis pour la dérivée de la fonction $\gamma^{-1}I_1(k_0\gamma)$ on note que l'on a $\partial/\partial t = \partial/\partial\tau$ et l'on effectue une intégration par partie en se rappelant que $I_1(\infty) = 0$ et que $I_1(0)/0 = 1/2$. On dérive ensuite par rapport aux x_u en notant que $\partial_u = -\partial'_u$; pour la première parenthèse on transformera les expressions obtenues à l'aide de

$$\partial_u\partial^u\{r^{-1}[\psi]\} = r^{-1}[\partial'_u\partial'^u\psi] - \partial'_u\{r^{-1}[\partial'^u\psi]\} - \partial'_u\partial^u\{r^{-1}[\psi]\}, \tag{6}$$

$$\partial^u\{r^{-1}[\psi]\} = -[\psi]\partial'^u(r^{-1}) + [v^{-1}\partial_t\gamma]r^{-1}\partial'^u(r), \tag{7}$$

les crochets désignant les grandeurs retardées, c'est-à-dire prises au temps $t - (r/v)$. On voit ainsi apparaître des expressions qui se transforment en inté-

(1) *Voir* E. Durand, *Comptes rendus*, **236**, 1953, p. 1407; **236**, 1953, p. 1337.

grales de surface. Pour les dérivées ∂_u de la deuxième parenthèse de (2) on opère d'une manière analogue. En définitive on trouve l'expression suivante où les crochets désignent toujours les grandeurs retardées et où $\partial/\partial n$ est la dérivée suivant la normale à la surface S limitant le domaine (v) :

$$(8)\quad \left.\begin{matrix}4\pi\\2\pi\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_u, vt) = -\iiint_{v'} [(\partial'_u\,\partial'^u + k_0^2 - v^{-2}\,\partial_t\,\partial_t)\psi(x'_u, vt)]\, r^{-1}\, dv'$$

$$\iint_S \left\{ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\right] - [\psi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}[v^{-1}\,\partial_t\psi] \right\} dS'$$

$$- vk_0 \iiint_{(v')} dv' \int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} \{(\partial'_u\,\partial'^u + k_0^2 - v^{-2}\,\partial_\tau\,\partial_\tau)\psi(x'_u, v\tau)\}\,\gamma^{-1}\,\mathrm{I}_1(k_0\gamma)\,d\tau$$

$$+ \frac{k_0^2}{2}\iint_S [\psi]\frac{\partial r}{\partial n}\, dS'$$

$$vk_0 \iint_S dS' \left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} \psi(x'_u, v\tau)\frac{\partial}{\partial r}\{\gamma^{-1}\,\mathrm{I}_1(k_0\gamma)\}\, d\tau$$

$$+ vk_0 \iint_S dS' \int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} \left\{\frac{\partial}{\partial n}\psi(x'_u, v\tau)\right\}\gamma^{-1}\,\mathrm{I}_1(k_0\gamma)\, d\tau.$$

Cette expression (8) est une identité valable quelle que soit la fonction ψ; mais si ψ obéit à $\{\partial'_u\,\partial'^u + k_0^2 - v^{-2}\,\partial_t\,\partial_t\}\psi = f(x'_u, vt)$ on voit que (8) donne $\psi(x_u, vt)$, quand on connaît ψ et ses dérivées normales sur S, ainsi que les sources $f(x'_u, vt)$. On pourrait donner à (8) une forme plus condensée en groupant les termes comme dans (1). On peut établir de la même manière une identité analogue à (1) où l'intégrale sur τ irait de $[t + (r/v)]$ à $+\infty$ et qui correspondrait aux ondes avancées. On pourrait aussi considérer la demi-somme des ondes avancées et retardées (ondes stationnaires) qui correspondrait à une variation de τ allant de $[t - (r/v)]$ à $[t + (r/v)]$. Si l'on avait $-k_0^2$ au lieu de $+k_0^2$ dans l'opérateur, on remplacerait $\mathrm{I}_0(k_0\gamma)$ par $\mathrm{I}_0(ik_0\gamma)$ c'est-à-dire par $\mathrm{J}_0(k_0\gamma)$. Quand $k_0 = 0$ dans (8), on retrouve la formule classique de Kirchhoff pour les ondes non amorties.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur le principe de Huygens en Théorie de l'électron de Dirac.* Note (*) de M. **Phan van Loc**, présentée par M. Louis de Broglie.

Nous nous proposons de chercher une expression du principe de Huygens en Mécanique ondulatoire à quatre fonctions d'onde de Dirac. Pour cela, partons

(*) Séance du 21 septembre 1953.

de l'identité fondamentale ([1])

$$(1)\qquad 4\pi\psi_n(x_u,\, vt) = (q^2 - \partial_u\partial^u + k_0^2)\left\{-v\int_v \frac{dv'}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} \psi_n(x'_u,\, v\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\,d\tau\right\}$$

avec $q = v^{-1}\,\partial_t$, $r = \sqrt{(x_u - x'_u)(x^u - x'^u)}$, $\gamma = \sqrt{v^2(t-\tau)^2 - r^2}$; ψ_n est l'une quelconque des quatre fonctions d'onde, et J_0 est la fonction de Bessel de première espèce, d'ordre zéro.

Soit les quatre matrices α_u, $u = 1, 2, 3$, α_4, de la théorie de l'électron de Dirac; α_0 étant la matrice unité à quatre rangs; on a la relation

$$(2)\qquad (\alpha_u\partial^u + ik_0\alpha_4 + q\alpha_0)(q\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u\partial^u) = (q^2 - \partial_u\partial^u + k_0^2).$$

Introduisons quatre nouvelles fonctions Φ_n, appelées potentiels des fonctions d'onde ([2]), et définies par

$$(3)\qquad 4\pi\Phi_n = (q\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u\partial^u)\left\{-v\int_v \frac{dv'}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} \psi_n(x'_u,\, v\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\,d\tau\right\}.$$

L'identité (1) prend alors la forme simple

$$(4)\qquad \psi_n(x_u,\, vt) = (\alpha_u\partial^u + ik_0\alpha_4 + q\alpha_0)\,\Phi_n(x_u,\, vt).$$

Transformons maintenant l'expression (3) en dérivant sous le signe somme. Avec les notations habituelles, nous avons

$$-\alpha_u\partial^u\{\ldots\} = -\alpha_u\left\{-v\int_v dv'\,\partial^u\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} \psi_n(x'_u,\, v\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\,d\tau\right]\right\}$$

$$= -\alpha_u v\int_v \partial'^u\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} \psi_n(x'_u,\, v\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\,d\tau\right]dv'$$

$$+ v\int_v \frac{dv'}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} \alpha_u\partial'^u\psi_n(x'_u,\, v\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\,d\tau.$$

Après avoir transformé la première intégrale du second membre en intégrale de surface, ajoutons aux deux membres de l'égalité ainsi obtenue, la même quantité $(q\alpha_0 - ik_0\alpha_4)\left\{-v\int_v(\ldots)\,dv'\right\}$. Par suite de la présence de l'opérateur q, il y aura des dérivations sous le signe somme, lesquelles, effectuées en remarquant que $\partial_t = -\partial_\tau$ pour des fonctions de γ, introduisent des termes qui se détruisent avec ceux provenant de la dérivation par rapport aux limites; on retrouvera simplement le même opérateur appliqué à $\psi_n(x'_u,\, v\tau)$ seul.

([1]) *Voir* E. Durand, *Comptes rendus*, **237**, 1953 p. 647.

([2]) E. Durand, *Math. pures et appliq.*, **28**, 1949, p. 85.

Compte tenu de ce que les ψ_n sont des fonctions d'onde de Dirac, obéissant en l'absence de champ aux équations :

$$(5)\qquad (q\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u \partial^u)\psi_n = 0 \qquad \text{avec} \quad k_0 = \frac{2\pi m_0 c}{h},$$

nous obtenons finalement la formule suivante :

$$(6)\qquad 4\pi\Phi_n = -v\int_S n^u\alpha_u\left[\frac{\partial}{\partial r}\int^{t-\frac{r}{v}}\psi_n(x'_u, v\tau)\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\,d\tau\right]\frac{dS'}{r}$$

$$= \int_S n^u\alpha_u\psi_n(x'_u, vt-r)\frac{dS'}{r} - vk_0\int_S dS'\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} n^u\alpha_u\psi_n(x'_u, v\tau)\frac{\mathrm{J}_1(k_0\gamma)}{\gamma}d\tau.$$

qui, avec (4), constitue la solution du problème.

Dans le cas particulier des fonctions d'onde de la forme $\psi_n(x_u)e^{ikvt}$, l'identité (1) s'écrit, après suppression du facteur e^{ikvt},

$$(7)\qquad 4\pi\psi_n(x_u) = [\partial_u\partial^u + k^2 - k_0^2]\left\{v\int_v \psi_n(x'_u)\frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}} e^{-ik\sqrt{\gamma^2+r^2}}\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\,d\tau\right\}.$$

Si nous prenons γ comme variable d'intégration à la place de τ, l'intégrale définie devient

$$(8)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-ik\sqrt{\gamma^2+r^2}}}{\sqrt{\gamma^2+r^2}}\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\gamma\,d\gamma = \frac{e^{-i\sqrt{k^2-k_0^2}\,r}}{i\sqrt{k^2-k_0^2}}$$

en utilisant une identité connue ([3]),

$$(9)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-ix\sqrt{1-m^2}}}{i\sqrt{1-m^2}}\mathrm{J}_0(my)\,m\,dm = \frac{e^{-i\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et en y posant $m = (i\gamma/r)$, $(x/r) = k$, $(y/r) = ik_0$.

Eu égard à (8), la formule (7) devient

$$(10)\qquad 4\pi\psi_n(x_u) = -[\partial_u\partial^u + k^2 - k_0^2]\int_v \psi_n(x'_u)\frac{e^{-i\sqrt{k^2-k_0^2}\,r}}{r}dv';$$

La même transformation effectuée à partir de (6) nous aurait conduit à la formule

$$(11)\qquad 4\pi\Phi_n(x_u) = \int_S \frac{e^{-i\sqrt{k^2-k_0^2}\,r}}{r}(n^u\alpha_u)\psi_n\,dS',$$

formule qui a été obtenue par M. E. Durand ([4]) directement à partir de (10).

([3]) WHITTAKER et WATSON, *Modern analysis*, p. 384.

([4]) *Comptes rendus*, **236**, 1953, p. 1337.

PHYSIQUE MACROMOLÉCULAIRE. — *Une nouvelle méthode pour déterminer la viscosité interne d'une macromolécule en chaîne par des mesures de biréfringence d'écoulement.* Note de M. **Roger Cerf**, présentée par M. Gustave Ribaud.

Le comportement de l'angle d'extinction χ pour une solution de macromolécules en chaînes soumise à un écoulement à gradient de vitesse constant G a fait l'objet d'études théoriques assez poussées pour les petites valeurs de G ([1]), ([2]). Toutefois les mesures sont difficiles aux faibles gradients de vitesse, de sorte que les possibilités qu'offre cette méthode pour déterminer la structure de la molécule en solution sont encore peu exploitées.

Dans le domaine des gradients de vitesse élevés la situation est à l'inverse. Les mesures sont faciles ([3]) et les résultats expérimentaux nombreux ; toutefois, malgré des travaux théoriques de Kuhn ([1]), certaines questions essentielles restent sans réponse. C'est ainsi que pour les très grandes valeurs de G l'expérience a systématiquement fourni pour l'angle χ une limite χ_0 différente de zéro, sans qu'il existe à l'heure actuelle de théorie pour ce phénomène.

Je me propose de montrer que la théorie de la sphère élastique ([2]), dont les prédictions concernant le comportement de l'angle χ pour les faibles valeurs de G furent confirmées par l'expérience, permet également d'expliquer l'existence de l'angle limite χ_0, de le calculer, et conduit par là-même à des possibilités nouvelles pour la détermination des paramètres moléculaires

Pour les valeurs élevées de G une sphère élastique prend la forme d'un ellipsoïde dont le grand axe est parallèle à la direction de l'écoulement. La particule est le siège de gradients de vitesse internes dont il est possible de calculer la valeur lorsque le gradient externe G tend vers l'infini. L'hypothèse fondamentale est maintenant la suivante : outre l'*anisotropie statique* due à la déformation par le champ hydrodynamique, chaque particule est le siège d'une *anisotropie dynamique* due à l'existence d'une vitesse de déformation ; on admet que la particule se comporte à l'égard de l'anisotropie dynamique comme un liquide pur à l'égard de la biréfringence dynamique, c'est-à-dire que les directions privilégiées sont orientées à 45° de la direction du gradient de vitesse, et que l'anisotropie dynamique est proportionnelle à ce gradient.

On appellera $(\Delta n)_L$ la biréfringence dynamique du liquide pur équivalent, et l'on posera $(\Delta n)_L = GP_L$. Le coefficient P_L est une constante. On écrira d'autre part la biréfringence Δn de la solution sous la forme $\Delta n = c_v GP$, où c_v

---

([1]) W. Kuhn et H. Kuhn, *Helv. Chim. Acta*, 28, 1945, p. 1533 ; 29, 1946, p. 71.

([2]) R. Cerf, *J. Chim. Phys.*, 48, 1951, p. 59 et 85.

([3]) Toutefois, certaines causes d'erreur se présentent, en particulier l'échauffement de la solution qui peut produire des réflexions parasites.

représente la concentration en volume de la solution, et l'on supposera que P est constant. (Pour une solution de macromolécules en chaînes P est souvent constant de façon rigoureuse. Quelquefois la courbe $\Delta n(G)$ présente une certaine courbure, mais dans ce cas P redevient constant pour G très grand, et c'est alors cette valeur limite de P que l'on considérera.)

Dans ces conditions les axes optiques des particules déformées ne coïncident pas avec leurs axes géométriques, de sorte que pour G très grand l'angle χ tend bien vers une limite χ_0 différente de zéro. J'ai obtenu pour une solution monodispersée, infiniment diluée la formule suivante :

$$\sin 2\chi_0 = \frac{P_L}{P}\,\frac{2\eta_0}{2\eta_0+\eta_i} \tag{1}$$

où η_0 et η_i désignent respectivement la viscosité du solvant et la viscosité interne de la particule.

Si l'on veut appliquer cette théorie à une solution de macromolécules en chaînes on pourra déterminer expérimentalement le rapport P_L/P en étudiant les variations de la biréfringence Δ_n avec la concentration massique c. Il suffira d'admettre qu'une solution dont la concentration c est égale à la concentration massique moyenne $c^\star$ à l'intérieur *d'une macromolécule isolée*, possède aux faibles gradients de vitesse les mêmes caractères dynamo-optiques que le liquide pur équivalent à la particule, dont l'existence a été postulée ci-dessus.

On peut alors utiliser la formule (1) de deux façons différentes.

1° On peut évaluer la viscosité interne de la particule en mesurant la viscosité aux faibles gradients de vitesse d'une solution de concentration $c^\star$, et par suite calculer la valeur de χ_0. On peut ainsi contrôler la validité de la formule (1). On utilisera dans la mesure du possible des solutions faiblement polydispersées.

Le tableau concerne quatre polyisobutylènes de masse moléculaire croissante étudiés par Zvetkov et Frisman ([4]). Les valeurs calculées de χ_0 concordent remarquablement avec les résultats de mesures. J'ai constaté une concordance analogue pour un polyméthacrylate de méthyle (mesures de Zvetkov et Petrova ([5]).

	Milled Oppanol.	Milled Vystanex.	Vystanex.	Oppanol.
M.........	28 700	32 000	47 000	132 000
η_i.........	0,058	0,035	0,033	0,06
χ_0 calculé...	14°	7° 10′	7° 50′	2° 15′
χ_0 mesuré..	13° 50′	7° 38′	6° 51′	1° 57′

2° On peut utiliser la formule (1) pour déterminer la viscosité interne de la particule. On se rappelle que pour déterminer les deux coefficients mécaniques μ

([4]) *Acta Physicochim., U. R. S. S.*, **20**, 1945, p. 61.
([5]) *Zhur. Fiz. Khim.*, 23, 1949, p. 368.

(module de cisaillement) et η_i caractérisant la particule, il fallait jusqu'ici mesurer la pente initiale $(\mathrm{tg}\,\alpha)_0$ de la courbe $\chi(G)$ pour des solvants de viscosité différente ([2]). On peut à présent déterminer ces deux coefficients à partir d'expériences effectuées dans un seul solvant, en mesurant χ_0 et $(\mathrm{tg}\,\alpha)_0$. Il s'agit là d'un progrès substantiel. Il sera possible en particulier d'étudier les modifications que subissent ces coefficients lorsqu'on change de solvant ou lorsqu'on fait varier la température.

MÉTALLOGRAPHIE. — *Étude de la nitruration de certains alliages nickel-cobalt au voisinage de leur point de Curie.* Note de M. **Georges Nury**, transmise par M. Pierre Chevenard.

Étude de quatre alliages dont les points de Curie s'échelonnent entre 440 et 540°. L'influence de la transformation magnétique se traduit par un maximum aigu de vitesse de nitruration au point de Curie, maximum dont l'amplitude varie suivant le point de Curie de l'alliage étudié.

Dans une Note précédente ([1]), nous avons mis en évidence « l'influence de la transformation magnétique sur la vitesse de nitruration du fer ».

Le présent travail est consacré à l'étude de la nitruration d'alliages nickel-cobalt au voisinage de leur point de Curie.

La nitruration a été effectuée dans les mêmes conditions que l'étude précédente; les expériences ont été faites entre 300 et 600° C.

Les variations de vitesse de nitruration ont été suivies par la variation de la microdureté superficielle des échantillons, au moyen d'un microscléromètre Reichert; un examen micrographique a confirmé les résultats obtenus par cette méthode.

L'étude a porté sur la nitruration du nickel pur, du cobalt pur et de quatre alliages nickel-cobalt ayant les caractéristiques suivantes :

Alliage n° 1 : 12 % cobalt, point de Curie 540°;
Alliage n° 2 : 10 % cobalt, point de Curie 475°;
Alliage n° 3 : 9 % cobalt, point de Curie 460°;
Alliage n° 4 : 8 % cobalt, point de Curie 440°.

Selon les résultats expérimentaux, nombreux et cohérents, les courbes « dureté-température » obtenues (*fig.* 1, 2, 3 et 4) accusent trois maxima très nets dont les abscisses sont remarquables. Pour deux d'entre eux, respectivement situés à l'aplomb de 360° et 460°, cette abscisse varie peu avec le titre de l'alliage et coïncide avec une température spécifique du nickel, du cobalt ou de leurs nitrures; nous avons retrouvé les mêmes anomalies lors de la nitruration du cobalt pur et du nickel pur. Un tel résultat est inattendu et nous hésitons encore à proposer une interprétation.

([1]) *Comptes rendus*, **236**, 1953, p. 1487.

Pour le troisième maximum, l'abscisse coïncide, aux erreurs expérimentales près, avec le point de Curie de l'alliage nickel-cobalt, variable avec le titre de l'alliage; l'amplitude de ce maximum varie suivant la température de Curie de l'alliage; notons qu'elle est la plus grande pour un alliage ayant son point de Curie à 475°.

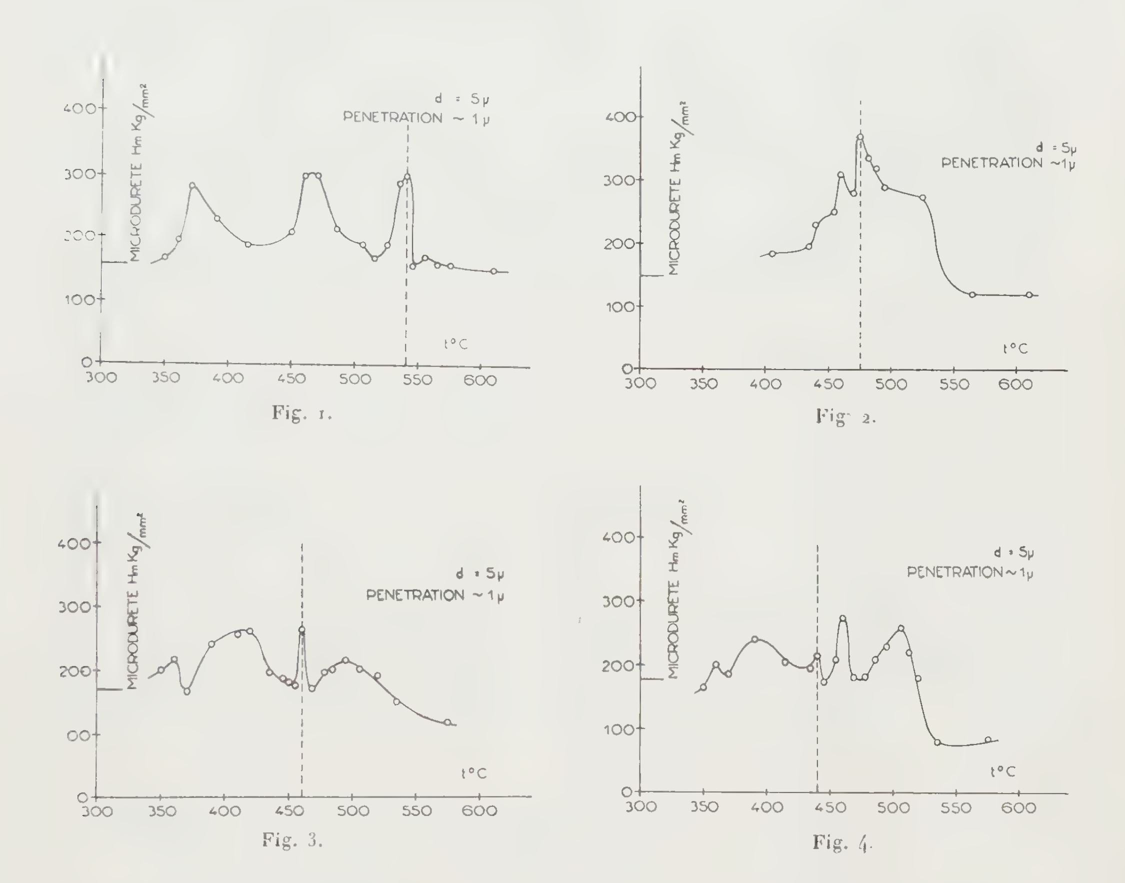


Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 3. Fig. 4.

Ce troisième maximum montre une fois de plus ([2]) l'influence considérable du phénomène de transformation magnétique sur l'activité chimique.

En dehors des trois discontinuités citées, on peut noter, sur les figures 3 et 4, vers 400 et 500°, deux maxima très étalés de dureté superficielle qui n'ont pas encore reçu d'interprétation satisfaisante.

En résumé, cette étude confirme de façon certaine les résultats déjà obtenus dans l'étude de « l'influence des transformations du second ordre

---

([2]) H. Forestier et R. Lille, *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 265; **204**, 1937, p. 1254; **205**, 1937, p. 848; R. Lille, *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 1891; R. Lille, *Thèse*, Strasbourg, 1943; H. Forestier et G. Nury, *Colloque international sur l'état solide*, Paris, octobre 1948, *Comptes rendus*, **227**, 1948, p. 280.

sur l'activité chimique des corps considérés » ([1]), ([2]), ([3]). Elle peut avoir un intérêt pratique dans la fabrication d'alliages à dureté superficielle élevée.

GÉOLOGIE. — *Note préliminaire sur la nappe de glissement medjanienne du Tell algérien méridional.* Note (*) de MM. **André Caire** et **Maurice Mattauer**, transmise par M. Pierre Pruvost.

Dans la partie méridionale de l'Atlas tellien d'Algérie, le Medjanien (Nummulitique supérieur) forme une série de massifs qui se distribuent presque symétriquement de part et d'autre du Titteri.

A l'Est, ils jalonnent la zone sub-bibanique d'Aumale à Sétif. A l'Ouest, on les rencontre au Sud de l'Ouarsenis et dans le fossé tectonique de Teniet el Haad.

Nous avons eu l'occasion d'étudier, sur le territoire des feuilles au 1/200 000e d'Akbou et de Teniet el Haad, la plupart des affleurements medjaniens actuellement connus. Ils nous ont montré les caractères suivants : les couches medjaniennes sont généralement localisées sur les points hauts; elles sont souvent très disloquées et reposent sur une surface presque horizontale dans son ensemble; parfois, une lame de Trias s'intercale entre le Medjanien et son substratum ([1]).

Ces faits nous ont conduit à admettre ([1]), ([2]) que tous les massifs étudiés représentaient des lambeaux, isolés par l'érosion, d'une vaste « nappe de glissement ». De plus, ce que l'on sait des massifs que nous n'avons pas étudié personnellement ([3]), ([4]) permet d'étendre cette interprétation à l'ensemble de la bordure sud-tellienne.

Tous ces « lambeaux » reposent sur d'autres unités de glissement, elles-mêmes superposées au Miocène inférieur. La nappe medjanienne est donc topographiquement et structuralement la plus élevée. Elle s'est mise en place après les nappes inférieures. Or nous savons ([1]) que ces dernières se sont écoulées du Nord au Sud. Par ailleurs, les couches à faciès numidien, qui ont reçu le nom de Medjanien dans la partie méridionale du Tell,

---

([3]) G. Nury et H. Forestier, *Comptes rendus*, **229**, 1949, p. 123; G. Nury, *Comptes rendus*, **230**, 1950, p. 1167; **234**, 1952, p. 946; *Symposium international sur l'état solide*, Göteborg, juin 1952; J. A. Hedvall, *Z. Anorg. Chem.*, **229**, 1936, p. S 413.

(*) Séance du 14 septembre 1953.

([1]) A. Caire, *Bull. Soc. géol. Fr.*, 6e série, **1**, 1951. p. 721-734.

([2]) M. Mattauer, *Comptes rendus*, **237**, 1953, p. 623.

([3]) J. Savornin, *Hodna et Plateau Sétifien*, *Thèse Sc.*, Lyon, 1920, 499 pages, 94 figures.

([4]) *Carte au 1/500 000e de l'Algérie*, 3e édit., 1952.

comprennent des niveaux à dragées de quartz, d'origine septentrionale. Enfin, ces couches sont encore largement représentées, sous le même faciès, dans le Nord de l'Algérie. On peut donc admettre que la nappe medjanienne est elle-même venue du Nord. Les couches qui la constituent se sont probablement déposées sur le flanc sud de la zone I ou à la limite des zones I et II de L. Glangeaud qui, dès 1926 ([5]), avait admis d'importants charriages antémiocènes dans le Nord du Tell.

Le décollement du Medjanien a pu débuter dans le Nord, à l'Oligocène, et son glissement s'est poursuivi, du Nord au Sud, jusqu'au Miocène supérieur. Ce déplacement peut être expliqué notamment par la théorie des « ondes d'ajustement postparoxysmales » proposée par L. Glangeaud pour le Jura, depuis 1947, et appliquée par lui à l'Algérie ([6]).

Durant le Miocène inférieur, la nappe a dû ainsi progresser sur un talus incliné dans son ensemble vers le Sud. Suivant les régions, ce cheminement s'est opéré selon diverses modalités qui seront précisées ultérieurement. Avant érosion, la nappe devait s'étendre, d'Ouest en Est, sur plus de 300 km. On pourrait aussi considérer comme des jalons, abandonnés au cours de sa progression vers le Sud, les massifs medjaniens situés dans la zone II ([5]) (*fig.* 1 et 3). Leur répartition n'obéit en effet à aucune loi générale. Dans ce cas, la flèche du glissement, d'au moins 20 km, atteindrait peut-être localement 100 km.

On voit que la reconnaissance d'une telle nappe doit conduire à modifier les conceptions actuelles sur l'évolution tectonique de l'Atlas tellien. En particulier, l'étude de cette unité permettra peut-être d'expliquer, à l'échelle de l'Algérie, la mise en place des nappes telliennes.

GÉOLOGIE. — *Précisions sur la tectonique de l'extrémité nord de la chaîne des Aravis (Haute-Savoie).* Note de M. **Jean Rosset**, transmise par M. Léon Moret.

Les falaises qui dominent la rive gauche de l'Arve, entre la station de Balme et Magland, peuvent être considérées comme le flanc normal d'un anticlinal couché dont la tête se voit dans la forêt de la Douve, en face de Balme (feuille de Cluses, n° 2, au 1/20 000) ([1]). Au-dessous, l'érosion a coupé obliquement deux autres unités au moins, anticlinaux ou écailles, l'une érodée jusqu'à l'Urgonien, et l'autre jusqu'à l'Hauterivien, chevauchées par l'Urgonien et l'Hauterivien de la falaise de l'Arve.

([5]) *Bull. Soc. géol. Fr.*, 4e série, **26**, 1926, p. 47-60.

([6]) *Id.*, 6e série, **2**, 1952, p. 619-640 et *XVe Section* (*Paléovolcanologie et Tectonique*) *du XIXe Congrès géol. international.* Alger, 1952 (*fig.* 2 et 4) (à l'impression)

([1]) J. Rosset, *Comptes rendus*, **234**, 1952, p. 1301.

La plus septentrionale de ces écailles inférieures (anticlinal de Radon-le-Queut) est constituée surtout d'une couverture urgonienne dont la plus grande partie est inclinée vers le Nord-Est. Elle se termine au Nord du Queut par un brusque plongement des couches, pli-faille en liaison avec la faille du Rocher Blanc, dans l'axe de laquelle il se place. Dans la région de Radon, on observe l'autre flanc de l'anticlinal où l'Urgonien, débité en un paquet d'écailles séparées par des miroirs de failles de plusieurs centaines de mètres carrés plonge vers le Sud-Est. Une petite frange de marnes du Gault borde ces écailles vers le Sud, tandis qu'un peu plus au Nord, dans les falaises qui dominent les chalets de « sous Radon », un lambeau de Sénonien constitue le terme le plus élevé de la série. Il faut peut-être attribuer à l'Hauterivien supérieur un affleurement visible à l'altitude 650 m à l'Ouest 20° Sud de « sous Radon » et qui constituerait alors le noyau de cet anticlinal. Vers le Sud, des éboulis recouvrant tout, empêchent de suivre la plongée des couches. A l'Ouest une faille plate marque le contact de cette unité de Radon-le-Queut avec l'Hauterivien du compartiment des Lays qui le chevauche. Enfin à l'Est, sur la rive droite de l'Arve, au Nord du lieudit « chez Party », un petit affleurement d'Urgonien dont la position semblait assez énigmatique, pourrait constituer le témoin le plus oriental de notre unité, le seul visible sur la rive droite, à cause de l'inclinaison générale des couches vers l'Est.

Les affleurements attribués à la deuxième écaille-anticlinal se suivent sur une ligne droite partant de Chessin, en face de Magland, pour monter jusqu'au-dessous de Vormy. Le noyau hauterivien, bien développé cette fois, forme la falaise visible au Nord-Ouest des Grangers; les couches y pendent vers le Nord-Ouest. On retrouve l'Hauterivien plus haut dans les bois de Petit, mais ici le pendage passe du Nord-Ouest au Sud-Est quand on suit les affleurements en marchant du Nord vers le Sud. Les deux flancs de l'anticlinal, assez étroit, sont donc conservés et visibles. La couverture de calcaire urgonien se montre en trois points : à l'extrémité Nord-Est au-dessus de Chessin, un affleurement réduit; au Nord du Chalet de la Pille, un affleurement important bien visible grâce à la trouée que l'Électricité de France a creusée dans les bois; enfin, au-dessus de l'Hauterivien de Petit, l'Urgonien plongeant vers le Sud-Ouest forme un escarpement de plus de 100 m, couronné à l'altitude 1403,3 par un peu de Gault. Des éboulis masquent le contact de cette deuxième unité avec l'Hauterivien des falaises situées sous Vormy.

Il n'est pas impossible que les affleurements assez importants de l'Hauterivien situés plus au Sud dans les bois qui dominent le Ranzier et les Pras, constituent les témoins d'une troisième écaille. Mais ici, l'Hauterivien seul est en place de façon certaine. La présence de l'Urgonien qui forme toute une série de pitons parfois élevés, au milieu des forêts, entre

cet Hauterivien et celui de la falaise de l'Arve, semble s'expliquer par d'importants glissements provenant de la grande falaise située au-dessous de Chérente.

Au-dessus des deux (ou trois) écailles décrites, s'étend la longue carapace d'Hauterivien et d'Urgonien qui forme la grande falaise depuis la pointe d'Areu jusqu'au-dessus de la Douve. La tectonique de cette couverture est pratiquement indépendante de la tectonique des écailles sous-jacentes; seules des failles verticales semblent correspondre aux accidents synclinaux qui séparent nos écailles. La plus importante de ces failles, celle du Rocher Blanc qui limite l'avancée extrême de l'écaille septentrionale, a déjà été décrite dans la Note de 1952 précitée.

De ces faits nouveaux se dégage la *conclusion suivante* : Quand la chaîne des Aravis s'est mise en place, l'extrémité Nord de la couverture décollée des massifs cristallins a formé d'abord les deux (ou trois) plis mentionnés dans cette Note, puis la masse principale de l'Urgonien a passé par-dessus, chevauchant, laminant et écaillant ces unités, les débordant même vers le Nord, ce qui explique peut-être la faille du Rocher Blanc avec son rejet de 450 m. Notons que la constatation de ces complications structurales, qui n'apparaissent pas dans la coupe classique de la rive droite de l'Arve (la falaise urgonienne de Balme y correspond à la falaise principale des Aravis), est rendue possible par la surélévation axiale qui se manifeste dès la rive gauche et de l'érosion subséquente.

OCÉANOGRAPHIE. — *Sur la formation des croissants de plage (beach cusps) et les mouvements de sédiments dans le profil.* Note de M. **André Rivière** et Mlle **Solange Vernhet**, présentée par M. Donatien Cot.

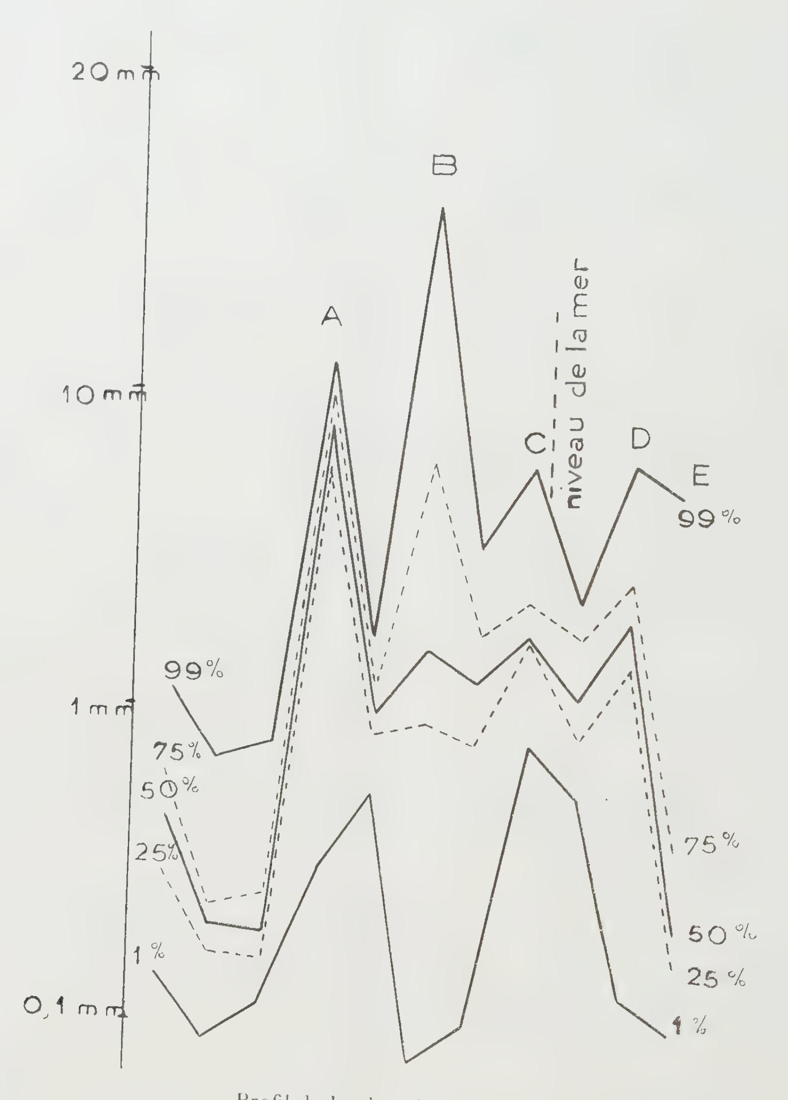
L'observation suivie de certaines plages montre que les cusps n'apparaissent que lors des phases dégressives des tempêtes. Leur formation n'est donc pas liée à un état défini de la mer, mais à une *évolution* de l'état de celle-ci. La succession des phénomènes conduit à penser que des phénomènes d'apport, liés à la phase terminale des tempêtes, favorisent leur existence.

La morphologie et l'évolution des « cusps » ont fait l'objet d'excellentes mises au point récentes [1] et [2] et nous n'y reviendrons pas ici. Des observations prolongées effectuées sur la rive nord du Golfe de Saint-Tropez et plus occasionnellement sur le tombolo occidental de Giens nous ont montré que des cusps (d'ailleurs de faibles dimensions et d'évolution variable) n'y existent guère *qu'après des périodes de gros temps.* Bien souvent, la présence simultanée de plusieurs niveaux de cusps marque les

(1) A. Guilcher, *Bul. Soc. Geol. Fr.*, 5e série, 19, 1949, p. 15, 30.

(2) Ph. H. Kuener, *Marine géology*, p. 293-297.

étapes du retour au niveau normal de la mer momentanément soulevée au rivage par la poussée des vents. A plusieurs reprises, il a été vérifié que la formation des cusps ne s'amorce que lors de la décroissance des



Profil de la plage W de Giens.
A, cusps bien formés; B, cordon rectiligne; C, cusps embryonnaires; D, cailloutis; E, sable fin.

tempêtes ou immédiatement après. Le sable des plages étudiées s'accompagne d'une certaine proportion de graviers et de cailloutis le plus souvent concentrés, soit dans les talus de déferlement (parfois étagés en plusieurs niveaux), soit en lignes de cusps plus ou moins évolués, parfois pareillement étagées. La granulométrie de ces différentes formations est beaucoup plus grossière que celle du reste de la plage, mais il y a des différences

importantes : *a*. dans les talus de déferlement actifs ou abandonnés par suite d'une variation momentanée du niveau marin, la granulométrie est très étalée entre les éléments grossiers et des éléments à peu près aussi fins que ceux que l'on peut trouver dans le sable avoisinant (3); *b*. au contraire, dans les cusps, les éléments fins n'existent plus, même lorsque ces cusps sont embryonnaires. La figure met clairement en évidence cette différence qui s'explique par le fait que les éléments des talus de déferlement se sont constitués simplement par *transfert dans une zone d'agitation*, tandis que la formation des cusps implique une *lévigation prolongée* par le va-et-vient des vagues. Talus de déferlement et cusps résultent donc d'actions marines totalement différentes et ne se forment d'ailleurs pas aux mêmes niveaux.

Ces différences sont encore soulignées par le fait que la présence de talus de déferlement étagés ne traduit guère que des variations de niveau, tandis que les cusps étagés n'apparaissent qu'après des périodes de mauvais temps. Il est d'ailleurs bien évident qu'un talus de déferlement peut se constituer en même temps qu'une ligne de cusps et à un niveau inférieur à lui, de sorte que ces deux types de formations peuvent coexister sur la portion émergée d'une plage.

On sait que les vagues poussées par le vent ont une action érosive intense, rejetant vers les petits fonds les sédiments meubles arrachés aux plages, ce qui entraîne, en particulier, la dispersion des éléments sableux grossiers et des graviers habituellement concentrés dans les talus de déferlement. Ces phénomènes tiennent, en grande partie, à l'existence de l'« undertow » résultant de la surélévation au rivage des eaux poussées par la tempête. En l'absence de vent, la seule action des vagues aurait, on peut le constater en modèle réduit, un effet exactement inverse. Comme à la fin d'une tempête, le vent tombe plus vite que la houle, cette action doit prédominer momentanément, et l'on observera des effets de transport de sédiment vers le rivage et notamment sans doute le retour des éléments grossiers précédemment dispersés.

C'est l'immobilisation progressive de ceux-ci dans la zone de va-et-vient des lames qui sera le point de départ de la formation des cusps suivant un mécanisme bien connu.

Au moins dans les conditions de nos études, il apparaît donc que la formation des cusps, très souvent assimilée à une forme particulière d'ablation, dépend tout autant d'un phénomène initial d'apport. Il semble que ces actions de sens opposé puissent être soit simultanées, soit plus ou moins séparées dans le temps.

---

(1) A. RIVIÈRE, *Comptes rendus*, **229**, 1949, p. 940.

CHIMIE VÉGÉTALE. — *Les acides uroniques et aldobiuroniques séparés par hydrolyse acide de la paille de blé et de certains bois d'arbres angiospermes.* Note M. **Adrien Roudier**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Les acides aldobiuroniques, constitués par la combinaison osidique d'un acide uronique et d'un aldose, sont relativement très résistants à l'hydrolyse. Il en résulte que lorsque l'on traite des tissus végétaux par un acide dilué (acide sulfurique N/2 bouillant, par exemple), les restes d'acides uroniques ne sont séparés qu'en partie des restes d'aldoses auxquels ils étaient reliés dans les hémicelluloses, par exemple, et se retrouvent dans l'hydrolysat principalement sous forme d'acides aldobiuroniques. L'étude de la constitution de ces derniers permet ainsi d'obtenir très simplement des renseignements précieux sur la constitution des hémicelluloses.

C'est ainsi que nous avons pu obtenir par précipitation alcoolique, après neutralisation par le carbonate de baryum, à partir d'un hydrolysat de paille de blé par l'acide sulfurique N/2, une fraction d'uronates et d'aldobiuronates de baryum dans laquelle l'analyse chromatographique sur papier [solvant homogène, acétate d'éthyle-acide acétique-acide formique-eau, 9 : 1, 5 : 0, 5 : 2 en volumes ([1])] nous a montré, en plus des acides hexuroniques, la présence de trois acides aldobiuroniques que nous désignerons par I, II et III. En effectuant un grand nombre de chromatogrammes sur papier nous avons pu obtenir, par élution des bandes correspondantes, des quantités de ces différents corps (20 à 150 mg) suffisantes pour effectuer quelques essais et en particulier l'hydrolyse [par l'acide chlorhydrique N/2, après une méthanolyse par le méthanol à 4 % de HCl ([2])] des acides aldobiuroniques en leurs constituants.

Nous avons pu ainsi constater que les trois acides I, II et III étaient constitués respectivement d'acide monométhyl-glucuronique et de xylose (I), d'acide glucuronique et de xylose (II), d'acide glucuronique et de galactose (III).

En tenant compte du travail de Bishop ([3]), I et II peuvent être identifiés respectivement au 3 α-[monométhyl-D-glucuronosyl]-D-xylose et au 3α-[D-glucuronosyl]-D-xylose. L'acide III qui se trouve en quantités beaucoup plus faibles que les deux autres, se comporte sur le chromatogramme comme l'acide aldobiuronique extrait de la gomme arabique

---

([1]) Solvant utilisé par J. K. N. Jones qui nous en a indiqué la formule.

([2]) J. K. N. Jones et L. E. Wise, *J. Chem. Soc.*, 1952, p. 3389.

([3]) *Can. J. Chem.*, 31, 1953, p. 134.

[6β-(D-glucuronosyl)-D-galactose] ([4]), mais cela n'est naturellement pas suffisant pour conclure à une identité, la liaison entre l'acide glucuronique et le galactose pouvant occuper une position différente.

Nous signalerons que la réaction colorée de détection des taches sur le chromatogramme avec le phtalate acide d'aniline ([5]), ([6]) fournit des indications précieuses sur la constitution des acides aldobiuroniques. Les deux corps I et II précédents donnent lorsque l'on chauffe progressivement le chromatogramme développé et imprégné de réactif, d'abord la couleur rose-chair des acides uroniques, puis la couleur pourpre des pentoses qui masque la précédente. L'acide III, comme d'ailleurs celui extrait de la gomme arabique, donne une coloration noire intense, caractéristique, due à la superposition des colorations rose-chair des acides uroniques et brun-verdâtre des hexoses.

Nous avons pu constater en outre que la fraction d'acides hexuroniques était constituée surtout d'acide galacturonique [réaction d'Ehrlich ([7]) positive et formation d'acide mucique sous l'action de l'eau de brome] et d'un peu d'acide glucuronique (présence de la glucurone mise en évidence par la chromatographie sur papier dans la solution aqueuse acide maintenue, au préalable, une heure à l'ébullition).

Dans le cas des bois d'arbres angiospermes (Peuplier, Tilleul, Tremble), nous avons constaté à l'analyse chromatographique la présence d'un acide monométhylglucuronique, d'un acide aldobiuronique se comportant à la chromatographie comme I ([8]). Il n'y a pas de tache correspondant à II. Mais, entre la position de celui-ci et celle de III se trouve une tache se colorant immédiatement en pourpre avec le phtalate acide d'aniline, ce qui semblerait indiquer une proportion plus faible d'acide uronique que chez II et qui correspond, de toutes façons, à un corps de constitution autre que celle de l'acide aldobiuronique II. Il en résulte qu'il existe certainement une différence dans la constitution des hémicelluloses de la paille de blé, d'une part, et des bois d'arbres angiospermes, d'autre part.

A notre connaissance, la présence d'un acide aldobiuronique constitué d'un reste d'acide glucuronique et d'un reste de galactose n'avait pas encore été signalée dans les hydrolysats de tissus lignifiés et la séparation chromatographique des acides I et II n'avait non plus jamais été effectuée.

([4]) HOTCHKISS et GOBBEL, *J. Amer. Chem. Soc.*, 58, 1936, p. 858.

([5]) S. M. PARTRIDGE, *Nature*, 164, 1949, p. 443.

([6]) A. ROUDIER, *Chim. anal.*, 33, n° spécial 11 *bis*, 1951, p. 391.

([7]) *Ber.*, 65, 1932, p. 352.

([8]) J. K. N. Jones et L. E. Wise ([1]) ont montré la présence dans un hydrolysat de bois de *Populus tremuloides*, du 2-α-[4-métyl-D-glucuronosyl]-α-D-xylose.

NUTRITION. — *Influence de la consommation d'eau sur l'élimination intestinale et rénale du calcium.* Note de M. **Jean Causeret**, présentée par M. Robert Courrier.

L'ingestion de volumes d'eau importants entraîne chez le Rat une forte augmentation de l'élimination fécale et urinaire du calcium. Cette augmentation provoque elle-même un abaissement de l'utilisation physiologique du calcium alimentaire.

Bien que Brull et collab. ([1]) aient montré chez le Chien que la polyurie provoquée par intubation de volumes d'eau importants s'accompagne d'une augmentation de l'excrétion calcique rénale, il ne semble pas que l'on ait jamais étudié systématiquement l'influence de la consommation d'eau sur l'utilisation physiologique du calcium alimentaire.

Nous avons étudié ce problème chez seize jeunes rats blancs de sexe mâle, pesant de 80 à 130 g, et répartis en trois lots comprenant respectivement 5, 5 et 6 sujets. Ces trois lots ont étés soumis à un même régime alimentaire, préparé avec des quantités d'eau différentes.

La composition du régime sec était la suivante : *caséine*, 18; *huile d'arachide*, 9; *amidon*, 44; *saccharose*, 24; *mélange salin de Hubbel sans* CO_3Ca, 2; *carbonate de calcium*, 1; *agar-agar*, 2; *vitamines hydrosolubles et liposolubles*. La cuisson de ce mélange a été réalisée au moyen des quantités d'eau suivantes :

lot I : 500 g d'eau par kilogramme de mélange sec;
lot II : 1 300 g d'eau par kilogramme de mélange sec;
lot III : 2 000 g d'eau par kilogramme de mélange sec.

Les études métaboliques ont duré 10 jours, la récolte des excreta commençant un jour après la détermination des ingesta et se poursuivant un jour de plus. Le calcium a été dosé par la méthode de Guillaumin dans les régimes humides, les fèces déshydratées et pulvérisées et l'urine.

Les résultats obtenus sont indiqués ci-après.

On voit que, conformément aux faits déjà signalés par Brull et coll., l'ingestion d'une quantité d'eau importante peut entraîner un accroissement très net de l'élimination urinaire du calcium : par rapport au lot I, celle-ci est sensiblement doublée pour le lot II et triplée pour le lot III.

Mais la perte fécale de calcium augmente également lorsque la quantité d'eau ingérée s'accroît.

([1]) L. Brull, R. Poverman et H. Goffard, *Arch. Int. Physiol.*, **43**, 1936, p. 238.

	Lot I	Lot II	Lot III
Eau consommée (cm^3) :			
Avec le régime...........	70	172	265
Boisson..................	52	40	35
Total....................	122	212	300
Calcium ingéré (mg)........	579,8	591,8	603,3
Calcium éliminé (mg) :			
Ca fécal.................	263,0	318,4	349,1
Ca urinaire..............	3,8	7,2	11,9
Ca total.................	266,4	325,6	361,0
C. R. du calcium ([2]) %.....	54,0 ± 0,94	45,0 ± 2,39	40,6 ± 3,11

En valeur relative, l'augmentation n'est pas aussi marquée que celle de la perte urinaire : cependant, l'effet de cette augmentation sur la valeur du coefficient de rétention est de beaucoup le plus important, puisque le calcium fécal représente ici de 97 à 99 % du calcium excrété au total. Il en résulte que le coefficient de rétention du calcium est nettement abaissé chez les animaux qui ingèrent des quantités d'eau excessives.

PALÉONTOLOGIE HUMAINE. — *Remarques sur la dentition de lait de l'*Homo neanderthalensis. Note (*) de M. **Pierre David**, transmise par M. Pierre Pruvost.

Nos connaissances sur la dentition de lait du type humain qui vécut en Europe occidentale aux temps moustériens sont extrêmement lacunaires. Une usure précoce et fortement marquée efface le dessin de la table dentaire rendant impossible toute comparaison anatomique précise. Les classiques travaux du Dr Henri-Martin sur l'enfant de La Quina nous ont bien fait connaître les molaires de lait supérieures, malheureusement en mauvais état de conservation; les recherches de Buxton sur l'enfant de Gibraltar ont donné quelques indications sur la dentition inférieure, d'après un spécimen fortement abrasé, de sorte que de tels documents ne révèlent que d'une manière insuffisante la morphologie dentaire.

Nos fouilles dans le gisement moustérien de La Chaise (Charente) nous ont permis de mettre à jour des pièces d'une remarquable conservation, révélant, pour la première fois, d'une façon particulièrement nette, la struc-

---

([2]) Le coefficient de rétention du calcium est calculé par la formule suivante :

$$\text{C. R.} = \frac{\text{Ca ingéré} - (\text{Ca fécal} + \text{Ca urinaire})}{\text{Ca ingéré}} \times 100$$

(*) Séance du 21 septembre 1953.

ture des molaires inférieures de lait et de la première molaire inférieure définitive d'un enfant moustérien.

Toutes ces dents ne dépassent pas d'une manière sensible, les dimensions des dents correspondantes d'un enfant moderne; elles offrent en outre un degré de complication au moins aussi grand, dans certaines dispositions même une spécialisation plus accentuée.

La première molaire de lait a perdu toute trace de paraconide. Une crête oblique relie le protoconide au métaconide; la *fovea* antérieure est bien creusée, le talonide est très développé. Rien ne permet de retrouver dans une telle dent la marque d'une disposition ancestrale coupante, évoquant celle des Singes Anthropomorphes.

La seconde molaire inférieure de lait présente un relief compliqué. La *fovea* antérieure est bien délimitée; le talonide porte un tubercule supplémentaire (*sextum tuberculum*) nettement individualisé.

La première molaire inférieure permanente montre tous les caractères de la dent correspondante de l'homme moderne. Les quatre denticules fondamentaux atteignent sensiblement les mêmes dimensions, le cinquième denticule ou hypoconulide est nettement plus petit que les précédents. Des tubercules accessoires s'observent sur la ligne médiane, en particulier entre le protoconide et le métaconide. L'hypoconide vient au contact du métaconide, dans la partie centrale de la table dentaire; nous avons ainsi sur cette dent, la disposition de type dryopithèque, qui persiste très généralement sur la première molaire inférieure de l'Homme moderne.

Il convient de souligner le caractère extrêmement évolué d'une telle dentition. Au niveau de l'*Homo neanderthalensis* toutes les particularités dentaires de l'Homme moderne étaient acquises; dans une certaine mesure même on pourrait déceler une complication ultra-humaine sur le type moustérien.

GÉNÉTIQUE. — *Sur la multiplicité des mécanismes génétiques conduisant à des barrages chez* Podospora anserina. Note (*) de M. **Georges Rizet**, présentée par M. Roger Heim.

Chez *Podospora*, quatre couples au moins de gènes différents, appartenant à trois groupes de linkage, peuvent être responsables de la formation de barrages. Trois de ces couples ont été mis en évidence par l'analyse d'un seul croisement entre souches d'origine géographique différente : il semble donc que les souches sauvages soient très polymorphes.

Nous avions déjà signalé, chez *Podospora* ([1]), certaines irrégularités

---

(*) Séance du 14 septembre 1953.

([1]) G. Rizet, *Thèse Sciences*, Paris, 1943.

observées dans des croisements entre souches d'origine géographique différente. Nous avons trouvé récemment une autre manifestation du polymorphisme de cette espèce : la présence de barrages entre souche *A* (*S* ou *s*) provenant du Calvados et *M* provenant de l'Aisne. Ces barrages sont morphologiquement identiques à ceux que nous avons décrit [2] entre souches *S* et *s*, mais leur déterminisme génétique est évidemment différent puisque, dans les confrontations où ils se manifestent, une souche *S* peut être remplacée par une souche *s*.

Les confrontations *M*/*S* ou *M*/*s* qui intéressent deux souches de signes différents sont fertiles : nous avons donc pu, en particulier, analyser la descendance de croisements $M \times s$. Nous avons obtenu en F_1 plusieurs centaines de souches issues chacune d'une ascospore uninucléée dont certaines, par groupes de 20 ou même de 40, ont été confrontées deux à deux de toutes les manières possibles. La plupart de ces confrontations fournissent également des barrages, mais celles qui n'en fournissent pas permettent de grouper ces souches en huit catégories que nous avons appelées *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, *l*, *M*, *s*. Deux souches appartenant à une même catégorie ne fournissent pas de barrage alors que des barrages se produisent dans tous les autres cas. Nous avons donc pu, en utilisant comme test une ou deux souches de chaque catégorie, rechercher les caractères de la totalité des souches F_1 isolées. A quelques exceptions près, constituées par des souches donnant barrage dans tous les cas (moins de 5 %), ces souches appartiennent aux huit groupes cités, les chiffres obtenus pour les divers groupes étant sensiblement égaux.

Ces résultats se comprennent si l'on admet que les souches *M* et *s* diffèrent par au moins trois couples de gènes que nous appellerons tt_1, uu_1, vv_1, un barrage se produisant lorsque les deux souches confrontées diffèrent par au moins un de ces gènes.

L'analyse de la descendance de croisements entre souches F_1 appartenant à des groupes différents confirme ce point de vue. L'un d'eux seulement, $M \times s$, fournit encore huit types de souches, d'autres quatre types ($s \times j$; $s \times l$; $s \times h$; $g \times k$; $g \times i$), d'autres enfin deux types seulement ($s \times g$; $l \times g$; $i \times j$; $l \times k$; $M \times h$; $s \times k$; $s \times i$). Toutes les souches F_2 ainsi obtenues rentrent dans les diverses catégories constituant la F_1; il devient donc facile d'établir la formule génique de ces catégories. Rien dans les résultats obtenus ne rappelle les particularités des souches s^S fournies par le croisement $S \times s$ (*loc. cit.*) : la souche *M* ne porte donc pas le gène *S*.

On retrouve des souches présentant les caractères des souches s^S dans la descendance de tous les croisements entre une souche *S* et une souche F_1

---

(2) G. Rizet, *Rev. Cytol. et Biol. végét.*, 13, 1952, p. 51-92.

quelconque : il semble donc que la souche *M* porte le gène *s*. Les souches s^S obtenues dans ces croisements ne constituent d'ailleurs pas une catégorie homogène : il en existe autant de types que de génotypes, quant aux couples tt_1, uu_1, vv_1, ces divers types donnant barrage entre eux. Toutes ces souches s^S montrent des réversions spontanées vers les souches *s* identiques quant au reste du génotype et il ne semble pas que ce génotype influe sur la fréquence des réversions. Cette absence d'interaction se manifeste encore d'une autre manière : on peut induire la transformation d'une souche s^S donnée en souche *s* correspondante par l'action d'une souche *s* dont le génotype est différent. Ainsi le barrage que l'on observe dans de telles confrontations ne constitue nullement une barrière pour la transformation.

Les divers croisements réalisés ont permis d'apporter quelques précisions quant à la localisation et aux rapports des divers gènes envisagés : les gènes *t* et *u* ne sont pas liés et très voisins des centromères correspondants. Le gène *v* au contraire est éloigné du centromère et le couple vv_1 probablement indépendant des couples tt_1 et uu_1. Les couples tt_1 et *Ss* sont étroitement liés.

Ainsi chez *Podospora anserina* nous avons rencontré au moins quatre couples de gènes différents, appartenant sans doute à trois groupes de « linkage » qui peuvent être responsables de la formation de barrages. L'un, *Ss*, nous était déjà connu par des singularités (*loc. cit.*) que nous n'avons pas retrouvées pour les trois couples nouvellement étudiés. Le fait que ces trois couples aient été mis en évidence par l'analyse d'un seul croisement initial, intéressant deux souches d'origine géographique différente, tend à montrer que les souches sauvages sont très polymorphes. Si les barrages sont réellement des phénomènes d'inhibition, on peut voir là un mécanisme, sans doute imparfait, mais peut-être réel d'isolement de formes locales chez les Champignons. Enfin le fait qu'un même aspect morphologique : la production de barrages, puisse être sous la dépendance de gènes variés, est de nature à rappeler la nécessité d'études expérimentales précises et répétées dans les études génétiques de populations.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Action des antipodes optiques du tryptophane sur la croissance de certaines espèces bactériennes* (1). Note de M. **Jacques Nicolle**, présentée par M. Maurice Lemoigne.

Nous avons pu observer que le *d*(+) tryptophane antipode *non* naturel qui n'a pu convenir ni comme source de carbone, ni comme source d'azote pour nos bactéries exerce sur elles une action inhibitrice vis-à-vis de leur croissance.

(1) Souches de l'Institut Pasteur de Paris.

Utilisant notre milieu synthétique habituel ([2]) nous avons cherché si les antipodes optiques du tryptophane pouvaient convenir comme seule source de carbone et comme seule source d'azote aux espèces bactériennes suivantes :

Salmonella enteritidis typhimurium Danitz, *Salmonella enteritidis* Gaertner, *Salmonella typhi* H 901 Lister, *Salmonella paratyphi B.* Jourdan, *Escherichia coli* Monod, *Proteus vulgaris* X 19, *Shigella flexneri*, *Shigella dysenteriæ* 35, *Klebsiella pneumoniæ*, *Pseudomonas æruginosa* melanifere, *Bacillus subtilis* Bromborough.

1° Le *l* (—) tryptophane (antipode naturel) :

a. a pu constituer une très médiocre source de carbone et seulement pour les 4 espèces suivantes :

Salmonella enteritidis typhimurium Danitz, *Escherichia coli* Monod, *Shigella dysenteriæ* 35, *Pseudomonas æruginosa* melanifère;

b. il s'est montré utilisable comme source d'azote (moins bien que le sulfate d'ammoniaque) ([3]) pour les 8 espèces suivantes :

Salmonella enteritidis typhimurium Danitz, *Salmonella enteritidis* Gaertner, *Escherichia coli* Monod, *Salmonella typhi* H 901 Lister, *Shigella flexneri*, *Shigella dysenteriæ* 35, *Pseudomonas æruginosa* melanifere, *Proteus vulgaris* X 19.

2° Le *d* (+) tryptophane (antipode non naturel) n'a pu convenir en aucun cas ni comme source de carbone, ni comme source d'azote.

3° Nous avons alors cherché si ce dernier isomère possédait une action empêchante pour la croissance de nos bactéries. Sur les 11 espèces en question nous avons obtenu : deux arrêts complets de croissance pour *Proteus vulgaris* X 19 et *Klebsiella pneumoniæ*, des diminutions ou des retards dans la croissance pour les 9 autres espèces.

Nous présentons ci-après à titre d'exemple les courbes relatives à des mesures effectuées avec l'appareil de Coleman pour une souche de *Salmonella enteritidis typhimurium* Danitz à pH 7,2 et à pH 8,0. Dans des tubes de 20 cm^3 de notre milieu synthétique nous avons introduit 0,060 g de *d* (+) glucose, puis des doses diverses de *d* (+) tryptophane. Pour 0,010 g (soit 0,050 %) et plus, un effet inhibiteur très net se produit dans tous les cas, mais ce qui mérite aussi d'être signalé c'est que pour des quantités faibles de l'ordre de 10^{-4} g (soit une concentration de 5.10^{-4}) nous obtenons au contraire un effet exaltant, c'est-à-dire que la croissance est alors supérieure à celle de notre témoin qui ne renferme que du glucose.

([2]) A. Lwoff, F. Nitti et Mme Tréfouël, *Ann. Inst. Pasteur*, 67, 1941, p. 17.

([3]) J. Panijel et J. Huppert, *Comptes rendus*, 234, 1952, p. 1226.

4° Nous avons examiné si l'apport de *l* (—) tryptophane à un milieu contenant l'autre antipode comme inhibiteur pouvait annihiler cette action et restituer une croissance normale, mais les résultats furent négatifs.

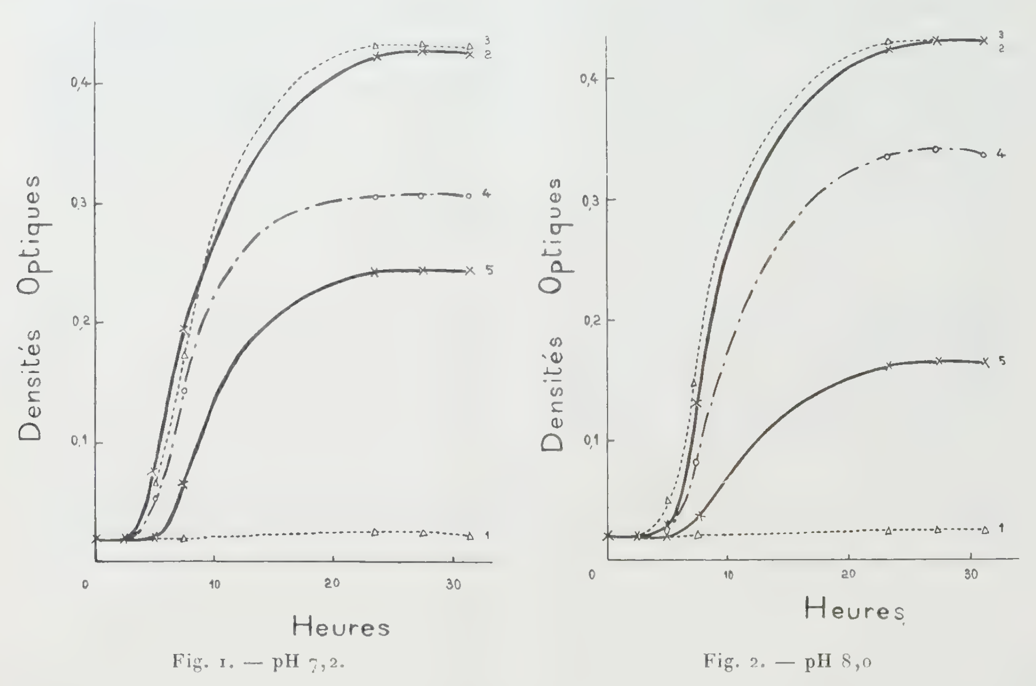


Fig. 1. — pH 7,2.   Fig. 2. — pH 8,0

1, témoin sans carbone; 2, témoin normal; 3, 4 et 5, avec des doses de *d* (+) tryptophane de 10^{-4} g, 10^{-2} g, 10^{-1} g en plus du milieu normal et du glucose. Effet inhibiteur plus important à pH 8,0 qu'à pH 7,2.

5° Les courbes obtenues en portant en abscisse les concentrations en antipode *non* naturel et en ordonnée les maxima de croissances y relatifs ne se présentent pas sous une forme linéaire.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Sur l'évolution et le sort de l'éthanal libéré au cours de la fermentation alcoolique.* Note de MM. **Jean Ribéreau-Gayon** et **Émile Peynaud**, présentée par M. Maurice Lemoigne.

Il a été démontré que l'acide acétique (*a*), l'acide succinique (*s*), l'acétoïne (*m*) et le 2.3-butanediol (*b*), produits de manière constante par la fermentation alcoolique, ainsi que la petite quantité d'éthanal (*h*) restant quand le sucre a été transformé, sont formés à partir de l'acide pyruvique (*p*) provenant de la fermentation glycéropyruvique [1]. Ces corps équivalent donc

[1] L. Genevois, E. Peynaud et Ribéreau-Gayon, *Comptes rendus*, 1946, **223**, p. 693; 1947, **224**, p. 762; 1948, **226**, p. 126; 1948, **226**, p. 439; 1948, **227**, p. 227; 1949, **229**, p. 479; 1949, **229**, p. 777.

au glycérol (g) et l'on peut écrire :

$$5s + 2a + b + 2m + h = \Sigma = p = g.$$

Dans plusieurs centaines de fermentations, Σ avait été trouvé égal à 0,8 ou 0,9 g, mais une amélioration du dosage du glycérol dans les milieux fermentés nous a permis de diminuer la marge d'erreur et nous trouvons, dans des fermentations conduites en anaérobiose, Σ/g égal en moyenne à l'unité.

Dans la formation des produits secondaires, la décarboxylation de l'acide pyruvique qui donne de l'éthanal, peut intervenir avant ou après la condensation, mais il existe toujours au cours d'une fermentation une certaine quantité d'éthanal libéré.

Nous avons déterminé journellement, en fonction de la disparition du sucre, l'évolution de la teneur en éthanal dans un grand nombre de fermentations, conduites avec des levures différentes, dans divers milieux nutritifs et en faisant varier les conditions extérieures de température, d'aération, etc.

Dans tous les cas l'évolution de l'éthanal suit la même marche : montée rapide du taux d'éthanal tout au début, avec les premiers grammes de sucre transformé, jusqu'à un maximum de valeur très variable suivant les levures et les conditions, atteint généralement lorsque 50 à 100 g de sucre sont fermentés, puis chute plus ou moins accusée. Lorsque la fermentation se déroule au contact de l'air, on observe à la fin du phénomène une remontée de l'éthanal due à l'oxydation de l'alcool. Voici pour deux levures des exemples de l'évolution de l'éthanal dans un milieu contenant 205 g de sucre par litre. L'éthanal est exprimé en milligrammes par litre.

	Saccharomyces cerevisiae				*Saccharomycode bisporus*			
	aérobiose		anaérobiose		aérobiose		anaérobiose	
	Sucre fermenté.	Éthanal.	Sucre fermenté.	Éthanal.	Sucre fermenté.	Éthanal.	Sucre fermenté.	Éthanal.
2 jours...	10	25	5	24	29	29	17	20
3 jours...	50	45	20	71	–	–	–	–
4 jours...	73	70	45	114	95	47	62	26
6 jours...	144	83	85	107	151	46	101	32
7 jours...	154	43	94	63	169	39	125	32
11 jours...	203	36	125	36	200	33	186	23

Les teneurs les plus élevées en éthanal enregistrées dans la phase de démarrage sont obtenues avec les *Saccharomyces*; il peut y avoir jusqu'à 125 mg/l d'éthanal libre.

Les autres genres de levures, *Saccharomycode*, *Torulopsis*, *Kloeckera*, forment des quantités beaucoup plus faibles. De plus, les *Saccharomyces* libèrent davantage d'éthanal en anaérobiose qu'au contact de l'air, jusqu'à 50 mg de plus, alors que c'est l'inverse pour les autres levures. Les petites quantités d'éthanal ainsi libérées ne peuvent provenir que de la fermentation glycéropyruvique. Elles dépendent de deux facteurs : la proportion du sucre qui subit la fermentation glycéropyruvique et surtout la vitesse avec laquelle cet éthanal ou ses précurseurs sont utilisés pour former des produits secondaires. La vitesse de formation est d'abord plus grande que la vitesse d'utilisation et c'est à ce décalage que l'on doit l'apparition de l'éthanal.

Il existe un rapport étroit entre le taux des produits secondaires formés et les teneurs en éthanal. C'est dans les conditions où les teneurs en éthanal libre sont les plus importantes que la fermentation donne moins d'acide succinique et qu'en conséquence, il se forme davantage d'acide acétique et de produits butanedioliques. Inversement une faible libération d'éthanal, entraînant une formation restreinte de ces derniers produits, correspond à une production élevée d'acide succinique. Trois faits établissent cette correspondance : 1° Les *Saccharomyces cerevisiae* travaillant à l'abri complet de l'air sont beaucoup moins succinogènes qu'à l'air, parce que vraisemblablement moins riches en enzyme de condensation, suivant une loi générale selon laquelle les cellules de levures sont en anaérobiose moins bien pourvues en divers enzymes ([2]); parallèlement le taux d'éthanal libéré est plus fort à l'abri de l'air. 2° *Saccharomycode bisporus* est une levure très succinogène, donnant 1 g d'acide succinique pour 100 g de sucre fermenté, et formant très peu d'acide acétique et de produits butanedioliques; c'est aussi la levure qui libère le moins d'éthanal. 3° Enfin l'addition au milieu nutritif d'un activeur provenant du traitement du mycélium d'*Aspergillus niger* ([3]) qui favorise la condensation succinique, abaisse le taux d'éthanal et des autres produits secondaires. Par contre, les activeurs qui ne modifient pas les proportions de ces produits, comme l'aneurine, les sels ammoniacaux, ne modifient pas non plus l'évolution de l'éthanal.

En conclusion, la considération des quantités d'éthanal libérées par la fermentation glycéropyruvique et son évolution au cours de la fermentation alcoolique permettent d'approfondir le mécanisme de la formation des produits secondaires. Elles confirment une fois de plus la valeur de notre hypothèse de travail.

A côté d'autres arguments, elles permettent de penser que la condensation de l'acide succinique se fait au stade de l'éthanal ou d'un précurseur de l'éthanal, et non au stade acétique.

([2]) P. P. Sloninski, *IIe Congrès International de Biochimie*, Paris, 1952.

([3]) J. Ribéreau-Gayon, E. Peynaud et M. Lafon, *Comptes rendus*, 234, 1952, p. 757.

MICROBIOLOGIE. — *Sur les propriétés physiologiques des leucocytes du Cobaye nouveau-né.* Note de M. **Albert Delaunay** et M[me] **Jacqueline Lebrun**, transmise par M. Gaston Ramon.

Les polynucléaires de cobayes nouveau-nés ont un pouvoir phagocytaire et une sensibilité chimiotactique moins marqués que les polynucléaires provenant d'animaux adultes.

Il arrive souvent que les sujets nouveau-nés offrent aux infections microbiennes une sensibilité plus grande ou moins grande que celle des sujets jeunes ou adultes de la même espèce (1). En cas de sensibilité moindre on admet, en général, que les nouveau-nés se trouvent protégés par les anticorps opsonisants que leur ont transmis leurs mères, la disparition ultérieure de cette immunité naturelle allant le plus souvent de pair avec un accroissement de la sensibilité. Mais quelle explication fournir quand on se trouve d'emblée en présence d'une sensibilité plus grande? A cette question, aucune réponse satisfaisante n'a encore été donnée. S'agirait-il en particulier d'une défense phagocytaire moins satisfaisante? Nous avons cherché à préciser ce point, cela dans le cadre général de nos études sur le terrain (2).

Les recherches rapportées dans cette Note concernent exclusivement les leucocytes polynucléaires de cobayes nouveau-nés, mâles ou femelles, âgés de 1, 2 et 3 jours.

Mode d'obtention des cellules. — A trois heures d'intervalle, sont injectés dans la cavité péritonéale des animaux 3 et 2 ml d'un bouillon peptoné stérile (celui qu'on emploie couramment dans tous les laboratoires de Bactériologie). De telles injections ne manquent jamais de provoquer localement, *chez le Cobaye adulte*, une réaction inflammatoire du type exsudatif riche en polynucléaires. Il en est de même chez *le Cobaye nouveau-né;* néanmoins, comparativement, les exsudats obtenus chez celui-ci sont environ deux fois moins riches en cellules et ils sont beaucoup plus souvent hémorragiques. Deux grands types d'expériences ont été faits.

1. *Expériences* in vivo. — Deux heures après la dernière injection intrapéritonéale de bouillon, c'est-à-dire à un moment où le péritoine contient déjà un grand nombre de polynucléaires, nous avons injecté dans cette cavité une suspension en eau physiologique de staphylocoques tués par la chaleur; de la sorte nous mettions, au contact même des cellules, des corps aisément phagocytables. Quarante minutes plus tard, les animaux étaient sacrifiés par section des carotides et leur sang était recueilli. Puis, la paroi abdominale une fois incisée, le liquide d'exsudat était prélevé. Une courte centrifugation permettait alors d'obtenir un culot cellulaire. Celui-ci était étalé sur lame et coloré. Finalement, nous faisions un calcul de l'index opsonique. Moyenne des chiffres obtenus (établie d'après le pourcentage de cellules qui avaient phagocyté) : de 27 à 60 %. C'est là

(1) *Presse Méd.*, n° 23, 1953, p. 499 et n° 30, 1953, p. 630.
(2) *Presse Méd.*, n° 62, p. 1283 et n° 70, 1951, p. 1455.

un index faible, en particulier très inférieur à ceux qu'on obtient, dans les mêmes conditions expérimentales, quand on a eu recours à des cobayes adultes.

Fallait-il mettre la faiblesse de cette phagocytose sur le compte d'un déficit du milieu en anticorps naturels ou sur un état des leucocytes encore imparfait du point de vue fonctionnel ? Pour le savoir, dans une nouvelle série d'expériences, nous avons injecté les staphylocoques, non plus en suspension dans l'eau physiologique, mais dans du sérum frais de cobaye adulte. Les résultats obtenus cette fois ont été sensiblement comparables aux précédents : le sérum ajouté n'a pas augmenté nettement la phagocytose. Pareil fait, d'ailleurs, ne nous a pas étonnés quand nous avons appris, un peu plus tard, que le contenu en agglutinines antistaphylococciques était, dans le sérum de nos cobayes nouveau-nés, à peu près comparable à celui que l'on trouve, en général, dans le sérum de cobayes adultes normaux ([3]).

Sur la foi de ces expériences *in vivo*, nous pouvons donc conclure que le pouvoir phagocytaire des leucocytes, au moins pour le cobaye, est moins accusé chez le nouveau-né que chez l'adulte.

2. *Expériences* in vitro. — Des leucocytes inflammatoires, réunis en culot par centrifugation d'un exsudat péritonéal provoqué chez le cobaye nouveau-né, sont remis en suspension *in vitro* dans du sérum frais de cobaye adulte. A cette préparation sont ajoutés, en quantité convenable, des staphylocoques tués. Temps de contact à 37° : une heure. Puis étalement et coloration des cellules sur lames. Mesure de l'index opsonique : 70 ou moins de 70 % ; donc, cette fois encore, un index plus faible que ceux obtenus dans les mêmes conditions avec des cellules de cobayes adultes.

Cependant, le pouvoir phagocytaire n'est que l'une des deux propriétés fondamentales des polynucléaires. La seconde est caractérisée par leur pouvoir de se déplacer, mieux même de se déplacer dans un sens défini (chimiotactisme). Très nette chez les cellules qui proviennent d'animaux âgés, appartient-elle également aux leucocytes prélevés chez les nouveau-nés ?

Une goutte d'exsudat péritonéal prélevé chez des cobayes nouveau-nés a été déposée sur une lame à la surface de laquelle se trouvaient fixés par dessiccation des grains d'amidon de pomme de terre ([4]). Cette goutte a été recouverte d'une lamelle et examinée à 37° pendant une heure. Les cellules ont gardé leur bon état mais elles ne se sont pas dirigées comme font les polynucléaires d'animaux adultes vers les grains d'amidon. A cela, deux explications possibles. Ou bien manquait dans le plasma un facteur nécessaire à la mise en jeu du tactisme : par exemple le complément ([4]). Effectivement, les plasmas de nos nouveau-nés n'avaient qu'un pouvoir complémentaire extrêmement faible. Cependant, le tactisme manifesté par les cellules de cobayes nouveau-nés reprises par du sérum de cobaye frais, donc riche en complément, tout en devenant positif (déplacement vers les grains d'amidon), demeure comparativement beaucoup plus faible que celui des leucocytes fournis par des animaux adultes. La seconde explication contient donc, elle aussi, une part de vérité : de même qu'ils phagocytent moins bien, les cellules d'animaux nouveau-nés ont une sensibilité chimiotactique encore imparfaite.

La séance est levée à 16 h 10 m.

L. B.

([3]) Ces dosages ont été effectués par M. Pillet.

([4]) *Rev. Immunol.*, 10, 1946, p. 33.

ERRATA.

—

(*Comptes rendus* du 20 avril 1953.)

Note présentée le 13 avril 1953, de MM. *Jean Roche*, *Raymond Michel* et *Jamshed Tata*, Sur l'excrétion biliaire de la glycuroconjugaison de la 3-5-3'-triiodothyronine :

Page 1614, titre de la Note, 1re ligne *au lieu de* de la glycuroconjugaison, *lire* et la glycuroconjugaison.

(*Comptes rendus* du 15 juin 1953.)

Note présentée le même jour, de MM. *Tsai-Chü* et *Max Morand*, Analyse spectrale des répartitions de l'intensité angulaire et de la dissymétrie Est-Ouest de la composante nucléaire du rayonnement cosmique faite au moyen d'une émulsion sensible :

Page 2313, 4e ligne du tableau II, *au lieu de* + 0,05 ± 0,035, *lire* + 0,051 ± 0,035.

» » 3e ligne du tableau III, *au lieu de* 33, *lire* 31.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OUVRAGES REÇUS PENDANT LES SÉANCES D'AOÛT 1953.

Science and Fruit, by THOMAS WALLACE and R. W. MARSCH. Long Ashton, Research Station, 1903-1953. University of Bristol, 1953; 1 vol. 25,5 cm.

The Story of Mond Nickel. Written for THE MOND NICKEL COMPANY'S JUBILEE, by A. C. STURNEY. Plaistow, The Curwen Press, 1951; 1 vol. 24,5 cm.

Union géodésique et géophysique internationale. N° 3, juillet 1953; *Bulletin d'information de l'U. G. G. I.*, publié par G. LACLAVÈRE; 1 vol. 24 cm.

Notes en rapport avec l'hydrogéologie des roches calcareuses, par IVAN DE RADZITZKY D'OSTROWICK. Extrait du *Bulletin de la Société royale d'études géologiques et archéologiques « Les chercheurs de la Wallonie »*, t. 15, Dinant, L. Bourdeaux-Capelle, 1953; 1 vol. 22,5 cm.

Le vie dell' infinito. Saggio di analisi elementare. Parte I. *Lo spazio piano*, par GIUSEPPE POLACCO. Roma, S. Barbara, di Ugo Pinnaro, 1953; 1 vol. 25 cm.

